Cálculo Diferencial e Integral I

2º Teste e 1º Exame

Campus da Alameda **8 de Janeiro de 2007, 9 horas**

Engenharia do Ambiente, Engenharia Biológica, Engenharia Civil, Engenharia Geológica e Mineira, Engenharia de Materiais, Engenharia do Território, Engenharia Química, Química

---

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes

Para resolver o 2º teste vire a página e resolva unicamente os grupos IV, V e VI

Este enunciado inclui resolução ou comentários de algumas perguntas. Faz-se notar aos alunos que tentar estudar para um exame simplesmente decorando as soluções do exame anterior é um exercício fútil comparável a apostar no Euromilhões em função do resultado da semana anterior.

(4) **I.** 1. Considere

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{x+2}{x^3+4x} \leq 0 \right\}, \qquad B = \{\, x \in \mathbb{R} : \log(3x) > 0 \,\}.$$

a) Determine, se existirem em $\mathbb{R}$, os supremos, ínfimos, máximos e mínimos de A e B.

b) Sendo (u_n) uma sucessão de termos reais decida se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:

(i) Se (u_n) tem termos em B e é crescente então é convergente (em $\mathbb{R}$).

(ii) Se (u_n) tem termos em A o conjunto dos seus sublimites em $\mathbb{R}$ é não vazio.

(2) **II.** Considere uma sucessão $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por

$$\begin{cases} a_0 = 3/2, \\ a_{n+1} = \frac{1}{a_n} + 1, \quad \text{se } n \geq 0. \end{cases}$$

a) Use indução matemática para mostrar que os termos da sucessão verificam $1 < a_n < 2$ para todo o $n \in \mathbb{N}$.

Temos $1 < a_0 = 3/2 < 2$. Bastará então mostrar que $1 < a_n < 2 \Rightarrow 1 < a_{n+1} < 2$ para todo o $n \in \mathbb{N}$. Para tal nota-se que se $a_n > 1$ então $0 < \frac{1}{a_n} < 1$ donde $1 < \frac{1}{a_n} + 1 < 2$, isto é, $1 < a_{n+1} < 2$.

b) Suponha que (a_n) é convergente. Calcule $\lim a_n$.

Se a sucessão (a_n) for convergente então, da definição por recorrência da sucessão passando ao limite, segue que $\lim a_{n+1} = \lim \frac{1}{a_n} + 1$ donde, designando por X o $\lim a_n$, segue que X deverá verificar a equação $X = \frac{1}{X} + 1$. Esta equação tem por soluções $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ mas como a segunda raiz é negativa e todos os termos da sucessão são positivos (de acordo com a alínea anterior) o limite terá que ser necessariamente $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. [Note que estamos a assumir que o limite existe. Provar que assim é não era pedido. Sugere-se, a quem tenha curiosidade, que comece por provar que a subsusucessão dos termos de ordem par e a subsucessão dos termos de ordem ímpar são ambas monótonas (a primeira crescente e a segunda decrescente), logo convergentes, porque são limitadas, e que os limites têm que ser iguais.]

(4) **III.** 1. Calcule (em $\overline{\mathbb{R}}$) ou mostre que não existem os seguintes limites de sucessões:

$$\lim \frac{(n+1)!}{(n!+1)n}, \qquad \lim \frac{(-1)^n n^2+1}{n^2+2}, \qquad \lim \sqrt[n]{1+e^n}.$$

$$\lim \frac{(n+1)!}{(n!+1)n} = \lim \frac{(n+1)n!}{(n!+1)n} = \lim \frac{(n+1)}{(1+1/n!)n} = \lim \frac{(n+1)}{n}\frac{1}{(1+1/n!)} = 1.$$

O seguinte limite não existe. Para justificá-lo considere as subsucessões dos termos de ordem par e dos termos de ordem ímpar e mostre que ambas têm limites distintos (divida o numerador e o denominador por n^2).

Para lidar com $\lim \sqrt[n]{1+e^n}$ existem várias possibilidades. Uma consiste em considerar

$$e = \sqrt[n]{e^n} < \sqrt[n]{1+e^n} \leq \sqrt[n]{e^n+e^n} = \sqrt[n]{2}e \to e$$

para justificar que o limite é e (método das sucessões enquadradas). Outra consiste em considerar $\lim \frac{1+e^{n+1}}{1+e^n} = \lim \frac{e^{-n}+e}{e^{-n}+1} = e$ para afirmar que o limite original tem necessariamente o mesmo valor. Finalmente outra possibilidade de resolução consiste em considerar a função $\mathbb{R} \ni x \mapsto (1+e^x)^{1/x}$ e calcular o seu limite quando $x \to +\infty$ (se o limite existir o limite original terá o mesmo valor pois corresponde a uma restrição da função a $\mathbb{N}$). Com efeito

$$\lim_{x\to+\infty} (1+e^x)^{1/x} = \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{\log(1+e^x)}{x}}.$$

Para calcular este último calculamos o limite do expoente usando regra de Cauchy

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(1+e^x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{1+e^x} = 1$$

donde, usando a continuidade da exponencial, $\lim_{x\to+\infty} (1+e^x)^{1/x} = e$.

2. Calcule (em $\overline{\mathbb{R}}$) ou mostre que não existem os seguintes limites:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{x+\frac{1}{x}}}{x}, \qquad \lim_{x\to+\infty} [\operatorname{sen} x(\log(x+1) - \log x)], \qquad \lim_{x\to+\infty} (\log x)^{1/x}.$$

Notar que não existe qualquer indeterminação no cálculo do primeiro limite e das propriedades da exponencial segue com facilidade que o limite é $+\infty$.

Notando que $\log(x+1) - \log x = \log(\frac{x+1}{x}) \to 0$ quando $x \to +\infty$ e que o sen é uma função limitada justifica-se que o segundo limite é 0.

Determinar o terceiro limite pode ser feito de maneira similar à terceira alternativa de resolução do último limite da alínea anterior.

(4,5) **IV.** Seja $C \in \mathbb{R}$ e considere uma função real de variável real definida por

$$f(x) = \begin{cases} xe^x + Cx, & \text{se } x \leq 0, \\ x^2 \log x, & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

a) Justifique que f é diferenciável em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

b) Determine $C \in \mathbb{R}$ tal que f é diferenciável em 0.

c) Com $C = -1$ mostre que existe um ponto de mínimo absoluto de f e que este ocorre num ponto $\alpha \in \,]0, +\infty[$.

d) Seja h a função inversa da restrição de f a $[\alpha, +\infty[$. Justifique que h é diferenciável em $]f(\alpha), +\infty[$ e calcule $h'(0)$.

(4) **V.** 1. Calcule $A, B, C, D \in \mathbb{R}$ tais que

$$\frac{x^2+3}{x^4-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$$

e aproveite para determinar todas as primitivas da função $\dfrac{x^2+3}{x^4-1}$ com limites finitos e iguais em $-\infty$ e em $+\infty$.

2. Calcule

a) $\displaystyle\int_1^2 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx.$ b) $\displaystyle\int_0^\pi x\cos x\,dx.$ c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\int_0^{e^{-x}} \operatorname{arctg}(t^2)\,dt.$

3. Calcule a área da região do plano definida por

$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -\operatorname{sen}(\pi x) \leq y \leq x - x^2\right\}.$$

(1,5) **VI.** Considere uma função contínua $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e defina $F : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ via

$$F(x) = \int_0^{1/x} \psi(tx^2)\,dt.$$

a) Usando uma mudança de variáveis adequada determine funções G e H tais que

$$F(x) = \frac{1}{H(x)} \int_0^{G(x)} \psi(y)\,dy.$$

Pretende-se substituir tx^2 como argumento da função ψ por y que será a nova variável de integração. Trata-se de uma mudança de variável $t \mapsto tx^2 = y$ com inversa $y \mapsto y/x^2 = t$. Para realizar a mudança de variável devemos considerar a derivada $\frac{dt}{dy} = \frac{1}{x^2}$ e notar que a $t = 0$ corresponde $y = 0$ e a $t = 1/x$ corresponde $y = x$ (notar também que do ponto de vista da integração x é uma constante). Assim o teorema sobre mudança de variáveis na integração conduz a

$$F(x) = \int_0^{1/x} \psi(tx^2)\,dt = \frac{1}{x^2}\int_0^x \psi(y)\,dy,$$

isto é, podem de facto determinar-se $H(x) = x^2$ e $G(x) = x$.

b) Mostre que se $\psi(0) = 0$ e ψ é diferenciável em 0 então existe $\lim_{x\to 0} F(x)$ (em $\mathbb{R}$).

Notamos que da alínea anterior

$$\lim_{x\to 0} F(x) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}\int_0^x \psi(y)\,dy.$$

Da continuidade e diferenciabilidade do integral indefinido (notar que por hipótese ψ é contínua o que possibilita a utilização do teorema fundamental do cálculo) é legítimo tentar resolver a indeterminação neste último limite considerando

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{2x}\psi(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\psi(x)-\psi(0)}{2x} = \frac{\psi'(0)}{2}$$

tendo-se usado a hipótese $\psi(0) = 0$ e a definição de derivada.