Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I

1º Exame , 2º Teste

(LEEC, MEEC)

Data: 08/01/2007, 13h00
Duração: Teste 1h45, Exame 3h00.
Notas:
As perguntas do teste (assinaladas com T) são: $4, 5, 6, 7.a, 7.b, 7.c$ e 8.
A cotação indicada corresponde ao Exame. A cotação do 2º Teste é o dobro da cotação correspondente para o exame.

1) Sejam (3 val)

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 1 > 0\} \text{ e } B = \{\frac{1}{z},\ z \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}\}.$$

Indique, se existirem em $\tilde{\mathbb{R}}$,

$$\sup A \cap \mathbb{R}^-,\ \max B,\ \max B \cap \mathbb{R}^-, \inf B \cap \mathbb{R}^+, \sup A \cup B.$$

Res: temos que $A =]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$, pelo que:

$$\sup A \cap \mathbb{R}^- = -1.$$

Por outro lado,

$$\max B = 1,$$

Não existe em $\tilde{\mathbb{R}}, \max B \cap \mathbb{R}^-$,

$$\inf B \cap \mathbb{R}^+ = 0,$$

e

$$\sup A \cup B = +\infty.$$

2) Diga se é verdadeira ou falsa cada uma das proposições seguintes: (4 val)

a) Se f é contínua em a, então f é diferenciável em a.

Falsa.

b) Se f é diferenciável em a, então f' é contínua em a.

Falsa.

c) Se f é duas vezes diferenciável em a, então f' é contínua em a.

Verdadeira.

Seja $f :]-1, 1[\to \mathbb{R}$ uma função diferenciável em $]-1, 1[$ e suponha que f é prolongável por continuidade aos pontos -1 e 1.

d) f tem máximo e mínimo.

Falsa.

e) f tem supremo e ínfimo (em $\mathbb{R}$).

Verdadeira.

f) f' tem supremo e ínfimo (em $\mathbb{R}$).

Falsa.

3) Calcule os seguintes limites:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log x}{\sqrt{x}}, \qquad \lim_{x\to +\infty} (1+\frac{3}{x})^x$$

$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log x}{\sqrt{x}} = (-\infty).(+\infty) = -\infty$, (em $\tilde{\mathbb{R}}$).

$\lim_{x\to +\infty}(1+\frac{3}{x})^x = 1^\infty$, Para levantar a indeterminação, atendendo a que:

$$(1+\frac{3}{x})^x = e^{\log(1+\frac{3}{x})x},$$

e sendo a exponencial uma função continua em $\mathbb{R}$, o limite em questão será:

$$\lim_{x\to +\infty}(1+\frac{3}{x})^x = e^{\lim_{x\to+\infty}\log(1+\frac{3}{x})x}.$$

Como,

$$\lim_{x\to +\infty}\log(1+\frac{3}{x})x = \lim_{x\to +\infty}\frac{\log(1+\frac{3}{x})}{\frac{1}{x}} = \frac{0}{0},$$

atendendo a que $f(x) = \log(1+\frac{3}{x})$ é diferenciável em $\mathbb{R}^+$ e $g(x) = \frac{1}{x}$ é diferenciável em $\mathbb{R}^+$ com derivada diferente de zero, pela Regra de Cauchy, como

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{\frac{\frac{-3}{x^2}}{1+\frac{3}{x}}}{-\frac{1}{x^2}} = 3,$$

concluímos que

$$\lim_{x\to +\infty}\log(1+\frac{3}{x})x = 3,$$

e portanto

$$\lim_{x\to +\infty}(1+\frac{3}{x})^x = e^3.$$

T4) Calcule uma primitiva de cada uma das funções seguintes: (2.5 val)

$$4x^4+e^{4x}, \quad 4x\operatorname{sen}4x^2, \quad 4x\sqrt{1-4x^2}, \quad \frac{4x}{4+x^4}, \quad \frac{\sqrt{x}}{1+x}.$$

As primeiras 4 primitivas são imediatas:

$$P(4x^4+e^{4x}) = \frac{4}{5}x^5+\frac{1}{4}e^{4x}.$$

$$P(4x \operatorname{sen} 4x^2) = \frac{1}{2}P(8x \operatorname{sen} 4x^2) = -\frac{1}{2}\cos 4x^2.$$

$$P(4x\sqrt{1-4x^2}) = -\frac{1}{2}P(-8x(1-4x^2))^{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{3}(1-4x^2)^{\frac{3}{2}}.$$

$$P(\frac{4x}{4+x^4}) = P(\frac{x}{1+\left(\frac{x^2}{2}\right)^2}) = \operatorname{arctg}\frac{x^2}{2}.$$

Relativamente à ultima primitiva, fazendo a substituição $x = t^2,\ (t > 0)$, temos que:

$$P(\frac{\sqrt{x}(t)}{1+x(t)}x'(t)) = 2P(\frac{t^2}{1+t^2}) = 2P(1-\frac{1}{1+t^2}) = 2(t - \operatorname{arctg} t),$$

donde

$$P(\frac{\sqrt{x}}{1+x}) = 2(\sqrt{x} - \operatorname{arctg}(\sqrt{x})).$$

T5) Calcule a área da região plana delimitada pelas rectas de equação $x = 1$, $x = e$, e pelos gráficos das funções e^x e $\log x$. (1 val)

Verifica-se fácilmente que a área em questão é dada por:

$$\int_1^e (e^x - \log x)\, dx = \int_1^e e^x\, dx - \int_1^e \log x\, dx = e^e - e - \int_1^e \log x\, dx$$

Atendendo a que (primitivação por partes)

$$P(\log x) = x \log x - x,$$

e à Regra de Barrow, temos então que:

$$\int_1^e (e^x - \log x)\, dx = e^e - e + 1.$$

T6) Seja f diferenciável em $\mathbb{R}$ e seja $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por (2 val)

$$\phi(x) = \int_x^{xe^x} f(t)\, dt.$$

Justifique que ϕ é duas vezes diferenciável em $\mathbb{R}$ e calcule ϕ' e ϕ''.

A função ϕ pode (atendendo às propriedades do integral) escrever-se como:

$$\phi(x) = \int_x^0 f(t)\, dt + \int_0^{xe^x} f(t)\, dt,$$

estando portanto bem definida em $\mathbb{R}$ (por f ser continua em $\mathbb{R}$).

Como portanto ϕ resulta da soma de uma função integral indefenido de uma função continua com a composta da função integral indefenido com a função (diferenciável) $y = xe^x$, concluímos, pelo T. Fundamental da Análise que ϕ é diferenciável em $\mathbb{R}$, e que:

$$\phi'(x) = -f(x) + f(xe^x)[e^x + xe^x].$$

Como f é diferenciável em $\mathbb{R}$, a função ϕ' é diferenciável em $\mathbb{R}$ (porque resulta de operações algébricas e da composição de funções diferenciáveis em $\mathbb{R}$) e portanto ϕ é duas vezes diferenciável, tendo-se:

$$\phi''(x) = -f'(x) + f'(xe^x)[e^x + xe^x]^2 + f(xe^x)[2e^x + xe^x].$$

7) Seja $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - \frac{1}{4} & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ \\ 2 \operatorname{arctg} x^2 + \frac{3-2\pi}{4} & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

Ta) Estude f quanto á diferenciabilidade. (3 val)

f é diferenciável em $]0,1[$ uma vez que é uma função polinomial nesse intervalo. De igual forma, f é diferenciável em $]1, +\infty[$ uma vez que. nesse intervalo, resulta de operações algébricas e da composição de funções diferenciáveis (arctg e funções polinomiais). Resta verificar o que se passa em $x = 1$. Temos então:

$$f'_-(1) = \lim_{x \to 1^-} \frac{x^2 - \frac{1}{4} - \frac{3}{4}}{x - 1} = 2,$$

(pela Regra de Cauchy) e

$$f'_+(1) = \lim_{x \to 1^+} \frac{2 \operatorname{arctg} x^2 + \frac{3-2\pi}{4} - \frac{3}{4}}{x - 1} = 2,$$

novamente pela Regra de Cauchy. Concluímos então que f é diferenciável em todos os pontos interiores ao seu domínio (i.e. em $\mathbb{R}^+$).

Tb) Determine os extremos locais e os intervalos de monotonia de f.

Para $x \in]0,1[, f'(x) = 2x$. Como a derivada é positiva, f é (estritamente) crescente nesse intervalo. Para $x > 1, f'(x) = 2\frac{2x}{1+x^4}$, e novamente concluímos que f é estritamente crescente nesse intervalo. Portanto, a função terá um mínimo (absoluto) em $x = 0$, dado por $f(0) = -\frac{1}{4}$, e não tem máximo, sendo $\sup f = \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} 2 \operatorname{arctg} x^2 + \frac{3-2\pi}{4} = \pi + \frac{3-2\pi}{4}$.

Tc) Determine o sentido das concavidades e os pontos de inflexão do gráfico de f.

A 2ª derivada é dada por:
$f''(x) = 2$, para $x \in]0,1[$, logo, nesse intervalo o gráfico da função tem a a concavidade voltada para cima, e, $f''(x) = \frac{4(1+x^4)-16x^4}{(1+x^4)^2}$, para $x > 1$, que é negativa. Logo em $]1, +\infty[$ o gráfico da função tem a concavidade voltada para baixo, sendo portanto $x = 1$ um ponto de inflexão do gráfico de f.

d) Indique, justificando, o contradomínio de f. (1 val)

Como vimos atrás, f é estritamente crescente no seu domínio, com minimo igual a $-\frac{1}{4}$ e supremo igual a $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \pi + \frac{3-2\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + \frac{3}{4}$. Uma vez que f é diferenciável em $\mathbb{R}^+$ logo contínua em $\mathbb{R}^+$, sabemos que o contradomínio de f é um intervalo. Mais precisamente,

$$f(\mathbb{R}_0^+) = [-\frac{1}{4}, \frac{\pi}{2} + \frac{3}{4}[.$$

T8) Seja f diferenciável em $\mathbb{R}$ e suponha que (1.5 val)

$$\{x \in \mathbb{R} : f(x) = x^2\} = \mathbb{Z}$$

Prove que, para todo o $z \in \mathbb{Z}$, existe $c_z \in]z, z+1[$ tal que

$$f'(c_z) = 2z + 1.$$

Sug: aplique o Teorema de Lagrange

Sendo f diferenciável em $\mathbb{R}$, em particular temos que f é diferenciável em qualquer intervalo $]z, z+1[$ com $z \in \mathbb{Z}$, e contínua em $[z, z+1]$. Logo, o T. de Lagrange garante a existência de $c_z \in]z, z+1[$, tal que

$$f'(c_z) = \frac{f(z+1) - f(z)}{z+1-z}.$$

Como $z \in \mathbb{Z}$ e $\mathbb{Z}$ é um conjunto indutivo, $z+1 \in \mathbb{Z}$. Logo, $f(z+1) = (z+1)^2$ e $f(z) = z^2$, e substituindo estas igualdades na fracção anterior temos imediatamente o resultado.