Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I

1^{o} Teste

(LEEC, MEEC)

Justifique cuidadosamente todas as respostas.

Data: 18/11/2006, 11h00
Duração: 1h30.

I) 1) Sejam $A = \{x \in \mathbb{R} : \frac{x}{x+1} \leq 2\}$ e $B = V_1(-2)$. (5 val)

a) Mostre que $A =]-\infty, -2] \cup]-1, +\infty[$.

Res:

$A \cap \{x : x+1 > 0\} = \{x : x \leq 2(x+1)\} \cap]-1, +\infty[=]-1, +\infty[.$

e

$A \cap \{x : x+1 < 0\} = \{x : x \geq 2(x+1)\} \cap]-\infty, -1[=]-\infty, -2],$

donde se conclui o pretendido.

b) Determine, se existirem em $\mathbb{R}$,

$\inf A \cap B, \max A \cap B, \sup A \cap B \cap (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}), \min A \cap B \cap \mathbb{Q}, \min A \cap \mathbb{R}^+$.

Res: Como $B =]-2-1, -2+1[=]-3, -1[$, temos que

$$A \cap B =]-3, -2]$$

e portanto:

$$\inf(A \cap B) = -3,$$

$$\max(A \cap B) = -2,$$

$$\sup A \cap B \cap (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}) = -2,$$

uma vez que podemos aproximar -2 por uma sucessão de irracionais pertencentes a o conj. $A \cap B$,

$A \cap B \cap \mathbb{Q}$ não tem minimo (o ínfimo é -3 que não pertence ao conjunto),

$A \cap \mathbb{R}^+ =]0, +\infty[$, não tem minimo.

c) Determine, se existir em $\bar{\mathbb{R}}$, o $\sup A \cap \mathbb{R}^+$.

Como $A \cap \mathbb{R}^+ =]0, +\infty[$ temos que, o supremo (em $\bar{\mathbb{R}}$) deste conjunto é $+\infty$,

2) Calcule, se existir em $\bar{\mathbb{R}}$, o limite das sucessões seguintes: (4 val)

$$\frac{2n^4 - 3n^3 + 10}{3n^5 + 1}, \qquad (-1)^n n, \qquad \sqrt[n]{n!} \qquad (1 - \frac{1}{3n^2})^{n^3}.$$

Res:

$$\lim \frac{2n^4 - 3n^3 + 10}{3n^5 + 1} = \lim \frac{\frac{2}{n} - \frac{3}{n^2} + \frac{10}{n^5}}{3 + \frac{1}{n^5}} = \frac{0}{3} = 0.$$

$$\lim(-1)^{2n} 2n = +\infty, \quad \lim(-1)^{2n+1}(2n+1) = -\infty,$$

e portanto a sucessão de termo geral $(-1)^n n$ não converge (em $\bar{\mathbb{R}}$). De facto, se esta sucessão fosse convergente (em $\bar{\mathbb{R}}$) qualquer subsucessão convergiria, para o mesmo limite.

$$\lim \sqrt[n]{n!} = \lim \frac{(n+1)!}{n!} = \lim(n+1) = +\infty.$$

$$\lim(1 - \frac{1}{3n^2})^{n^3} = \lim \left[(1 + \frac{\frac{-1}{3}}{n^2})^{n^2}\right]^n = 0,$$

uma vez que $(1 + \frac{\frac{-1}{3}}{n^2})^{n^2} \to e^{\frac{-1}{3}} (< 1)$.

II) 1) Seja $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por (3 val)

$$\phi(x) = \begin{cases} |x - 1| & \text{se } x \in \mathbb{R}_0^+ \\ \\ e^{\frac{1}{x}} & \text{se } x \in \mathbb{R}^- \end{cases}$$

a) Estude ϕ quanto à continuidade.

Res: Para $x \in \mathbb{R}^+$ a função resulta da composição da função afim $g(x) = x - 1$ com a função $h(z) = |z|$ (ambas contínuas em $\mathbb{R}$), pelo que podemos concluir que ϕ é contínua em $\mathbb{R}^+$. De igual forma, concluimos pela continuidade da função ϕ para $x \in \mathbb{R}^-$ uma vez que esta resulta da composição da função exponencial com $f(x) = \frac{1}{x}$ (ambas contínuas, a primeira em $\mathbb{R}$ e a segunda em $\mathbb{R} \backslash \{0\}$). Falta verificar o que se passa em $x = 0$. Temos:

$$\lim_{x \to 0^+} \phi(x) = \lim_{x \to 0^+} 1 - x = \phi(0) = 1,$$

mas

$$\lim_{x \to 0^-} \phi(x) = \lim_{x \to 0^-} e^{\frac{1}{x}} = e^{-\infty} = 0,$$

pelo que ϕ não é contínua em 0.

b) Determine (em $\bar{\mathbb{R}}$), $\lim_{x \to -\infty} \phi(x)$ e $\lim_{x \to +\infty} \phi(x)$.

Atendendo á alinea anterior,

$$\lim_{x \to -\infty} \phi(x) = \lim_{x \to -\infty} e^{\frac{1}{x}} = e^{\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x}} = e^0 = 1,$$

e

$$\lim_{x \to +\infty} \phi(x) = \lim_{x \to +\infty} x - 1 = +\infty.$$

(em $\bar{\mathbb{R}}$).

c) Determine, justificando, o contradomínio de ϕ.

Res: É claro, pela definição de ϕ, que $\phi(\mathbb{R}) \subseteq [0, +\infty[$. Por outro lado, como $\lim_{x\to 0^+} \phi(x) = \phi(0) = 1$ e $\lim_{x\to+\infty} \phi(x) = +\infty$, atendendo á continuidade de ϕ em $\mathbb{R}^+$ e ao teorema do valor intermédio, concluímos que $[1, +\infty[\subseteq \phi(\mathbb{R})$. Por outro lado,

$$\lim_{x\to 0^-} \phi(x) = 0 (= \phi(1)),$$

e

$$\lim_{x\to-\infty} = 1,$$

donde, novamente pelo Teorema do valor intermédio, concluímos que $[0, 1[\subseteq \phi(x)$. Concluímos portanto, que $\phi(\mathbb{R}) = [0, +\infty[$.

2) Calcule o seguinte limite: (2 val)

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{e^x - (x + 1)}{x} \right).$$

Res:

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{e^x - (x + 1)}{x} \right) = \lim_{x\to 0} \left(\frac{e^x - 1}{x} - \frac{x}{x} \right) = 1 - 1 = 0.$$

III) 1) Diga se é verdadeira ou falsa cada uma das proposições seguintes: (4 val)
Seja u_n uma sucessão de termos reais tal que o conjunto dos seus termos é $\{-1, 1\}$.

a) u_n não é convergente.

Res: Falsa. Basta considerar a sucessão u_n dada por:

$$u_1 = -1, \quad u_n = 1, \ \forall n \geq 2.$$

Esta sucessão tem como conj. dos seus termos o conj. $\{-1, 1\}$ e é obviamente convergente (para 1).

b) Se u_n é convergente, o seu limite é 1 ou -1.

Res: Verdadeira. Se o seu limite fosse $a \in \mathbb{R}$ tal que $a \neq 1 \wedge a \neq -1$, de acordo com a definição de limite, para qualquer ϵ existiria uma ordem p tal que $n > p \Rightarrow u_n \in V_\epsilon(a)$. Ora, considerando $\epsilon < \min\{|1-a|, |-1-a|\}$ chegamos a um absurdo, uma vez que, para este valor de ϵ, $V_\epsilon(a) \cap \{-1, 1\} = \emptyset$.

c) Se u_n não é convergente o conjunto dos seus sublimites é $\{-1, 1\}$.

Verdadeira. Como a sucessão é limitada, o conjunto dos seus sublimites S é não- vazio e $S \subseteq \{-1, 1\}$ pelo raciocínio da alinea anterior. Se u_n fosse convergente, S seria um conjunto singular. Sendo não convergente, pelo que foi dito atrás, $S = \{-1, 1\}$.

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua em $\mathbb{R}$ e seja v_n uma sucessão de termos reais.

d) Se v_n é decrescente e minorada então $f(v_n)$ é convergente.

Res: Verdadeira. v_n é limitada e monótona, logo convergente ($v_n \to a$). Como f é continua, $f(v_n) \to f(a)$.

e) Qualquer sucessão de termos em $f([0,1])$ tem subsucessões convergentes.

Res: Verdadeira. Como $[0,1]$ é um conjunto limitado e fechado e f é contínua nesse conjunto, o T. de Weierstrass garante a existência de máximo e mínimo de f nesse intervalo. Logo, a sucessão tem termos num conjunto limitado (i.e. é limitada), pelo que tem subsucessões convergentes (pelo T. de Bolzano-Weierstrass).

2) Seja $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ uma função contínua em $\mathbb{R}^+$ e suponha que existe <u>uma</u> sucessão u_n de termos em $\mathbb{R}^+$ convergente para zero e tal que (2 val)

$$f(u_n) \to f(0).$$

Será f contínua em zero?

(Se responder "sim"deverá provar a sua afirmação; se responder "não"deverá apresentar um contra exemplo).

Res: Falsa. Note-se que se afirma existir uma sucessão e não todas (se para qualquer sucessão x_n convergente para zero se verificasse $f(x_n) \to 0$, pela def. de continuidade no sentido de Heine f seria contínua em zero).

Contra-exemplo: basta considerar a função $f(x) = \operatorname{sen} \frac{1}{x}$, (contínua em $\mathbb{R}^+$). Se considerarmos $x_n = \frac{1}{n\pi}$, temos $x_n \to 0$ e $f(x_n) = \operatorname{sen}(n\pi) \to 0$. Sendo assim, se a afirmação fosse verdadeira, f seria prolongável por continuidade ao ponto 0 com $f(0) = 0$. Logo, pela def. de continuidade no sentido de Heine, para qualquer sucessão y_n com termos em $\mathbb{R}^+$ convergente para zero, teriamos que ter $\operatorname{sen}(y_n) \to 0$. Basta então notar que $y_n = \frac{1}{n\pi + \frac{\pi}{2}} \to 0$ e $f(y_n) = \operatorname{sen}(n\pi + \frac{\pi}{2}) \to 1$.