Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

ANÁLISE COMPLEXA E EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

TESTE DE RECUPERAÇÃO 1 - 18 DE JUNHO DE 2008 - DAS 11H ÀS 12:30H

Apresente e justifique todos os cálculos

[0,5 val.] 1. Resolva a equação $z^5 = 1 + i$.

Resolução. Usando a forma polar $1 + i = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$, obtemos
$$z = \sqrt[10]{2}e^{i\pi/20} \cdot e^{i2\pi k/5},\ k = 0, 1, 2, 3, 4.$$

2. Seja $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ uma função holomorfa com parte imaginária dada pela função
$$v(x, y) = 2y + 3x^2y - y^3.$$

[1,5 val.] Calcule a derivada da função f no ponto $1 - i$.

Resolução. Seja $f(x + iy) = u(x, y) + i(2y + 3x^2y - y^3)$. Aplicando as equações de Cauchy-Riemann obtemos
$$f'(x + iy) = \frac{\partial}{\partial y}(2y + 3x^2y - y^3) + i\frac{\partial}{\partial x}(2y + 3x^2y - y^3).$$
Logo $f'(1 - i) = 2 - 6i$.

[1 val.] 3. Seja $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{x + 0i\colon x \leq 0\}$. Calcule o integral
$$\int_\gamma \log(z)\ dz,$$
onde γ é um caminho em Ω com início em 1 e fim em i, e $\log$ denota o ramo principal do logaritmo com argumento em $[-\pi, \pi[$.

Resolução. Sega $\gamma(t)$, $0 \leq t \leq 1$ um caminho regular em Ω tal que $\gamma(0) = 1$ e $\gamma(1) = i$, eg., $\gamma(t) = 1 + t + it$. Temos $\frac{d}{dz}(-z + z\log z) = \log z$. Logo
$$\int_\gamma \log(z)\ dz = -i + i\log i - (-1 + 1\log 1) = 1 + i\left(\frac{\pi}{2} - 1\right).$$

4. Considere a função $f(z) = \frac{1}{z^2+1} + \frac{-1+\cos z}{z^2}$.

[1 val.] (a) Determine e classifique todas as singularidades de f.

Resolução. As singularidades de f são $i, -i, 0$. As singularidades $i, -i$ são pólos simples, e 0 é uma singularidade removível.

[0,5 val.] (b) Quantos desenvolvimentos de Laurent *distintos* admite a função f em torno do ponto $z = 1 + i$? Justifique.

Resolução. A função

$$h(z) = \begin{cases} \frac{-1+\cos z}{z^2} & z \neq 0 \\ -\frac{1}{2} & z = 0 \end{cases}$$

é análitica no plano complexo. Portanto, $h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^{(n)}(1+i)}{n!}(z-1-i)^n$ para qualquer $z \in \mathbb{C}$. A função

$$g(z) = \frac{1}{z^2+1} = \frac{i}{2}\left(\frac{1}{z+i} - \frac{1}{z-i}\right)$$

é análitica em $\mathbb{C} \setminus \{i, -i\}$. Logo g tem séries de Laurent nas regiões

$$R_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-(1+i)| < 1\},$$
$$R_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z-(1+i)| < \sqrt{5}\},$$
$$R_3 = \{z \in \mathbb{C} \mid \sqrt{5} < |z-(1+i)|\}.$$

Portanto f tem 3 séries de Laurent nas regiões distantas.

[1 val.] (c) Determine o desenvolvimento de Laurent de f na região definida pela condição $|z| > 1$.

Resolução.

$$f(z) = \frac{1}{z^2}\frac{1}{1+1/z^2} + \frac{1}{z^2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{z^{2n}} + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{z^{2n}}{(2n+2)!}$$

(d) Calcule

$$\oint_{|z|=\frac{1}{2}} f(z)\, dz \qquad \text{e} \qquad \oint_{|z-\frac{i}{2}|=2} f(z)\, dz.$$

[1 val.] onde no primeiro integral a curva é percorrida no sentido anti-horário e no segundo integral a curva é percorrida no sentido horário.

Resolução. No interior do disco $\{z \mid |z| \leq 1/2\}$ a função f é análitica. Logo

$$\oint_{|z|=\frac{1}{2}} f(z)\, dz = 0.$$

No dóminio $\mathbb{C} \setminus \{i, -i\}$ o caminho $\sigma(t) = \frac{i}{2} + 2e^{i2\pi t}$, $0 \leq t \leq 2\pi$ é homotópico à caminho $\tau(t) = re^{i2\pi t}$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Portanto $\oint_{|z-\frac{i}{2}|=2} f(z)\, dz = 2\pi i b_1$, em que b_1 é o coeficiente de z^{-1} da série de laurent de 4 (c). Portanto

$$\oint_{|z-\frac{i}{2}|=2} f(z)\, dz = 0.$$

5. Seja $D_R = \{z \in \mathbb{C}\colon \operatorname{Im}(z) \geq 0, |z| \leq R\}$ com $R > \sqrt{2}$.

[1 val.] (a) Calcule

$$\oint_{\partial D_R} \frac{e^{iz}}{z^2+2}\, dz.$$

onde a fronteira de D_R é percorrida no sentido anti-horário.

Resolução. Aplicando o teorema de resídous obtemos

$$\oint_{\partial D_R} \frac{e^{iz}}{z^2+2}\, dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{i\sqrt{2}} \frac{e^{iz}}{z^2+2} = 2\pi i \left(\frac{e^{-\sqrt{2}}}{i2\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{e^{\sqrt{2}}\sqrt{2}}.$$

[1,5 val.] (b) Calcule

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2+2}\, dx.$$

Resolução. Para $R > \sqrt{2}$, temos

$$\begin{aligned}\int_{-R}^{+R} \frac{\cos x}{x^2+2}\, dx &= \operatorname{Re}\left(\oint_{\partial D_R} \frac{e^{iz}}{z^2+2}\, dz - \int_0^{\pi} \frac{e^{iR\cos t}e^{-R\operatorname{sen} t}}{R^2e^{i2t}+2} iRe^{it}\, dt\right) \\ &= \frac{\pi}{e^{\sqrt{2}}\sqrt{2}} + \operatorname{Im}\left(\int_0^{\pi} \frac{e^{iR\cos t}e^{-R\operatorname{sen} t}}{R^2e^{i2t}+2} Re^{it}\, dt\right)\end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned}\left|\operatorname{Im}\left(\int_0^{\pi} \frac{e^{iR\cos t}e^{-R\operatorname{sen} t}}{R^2e^{i2t}+2} Re^{it}\, dt\right)\right| &\leq \int_0^{\pi} \frac{Re^{-R\operatorname{sen} t}}{R^2-2}\, dt \\ &\leq \frac{R}{R^2-2}\pi,\end{aligned}$$

obtemos

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{+R} \frac{\cos x}{x^2+2}\, dx = \frac{\pi}{e^{\sqrt{2}}\sqrt{2}}.$$

[1 val.] 6. Seja $f\colon \mathbb{C} \setminus \{1\} \to \mathbb{C}$ uma função holomorfa tal que $\lim_{z\to 0} \frac{f(z)}{z} = 1$. Calcule

$$\oint_{|z|=2} f\left(\tfrac{1}{z}\right)\, dz$$

onde a circunferência é percorrida no sentido horário.

Resolução. A função f é analítica em $|z| < 1$. Portanto

$$f(z) = \sum_{n=0} a_n z^n, \quad a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \text{ e } |z| < 1.$$

Como $\lim_{z\to 0} \frac{f(z)}{z} = 1$, obtemos $a_0 = 0$ e $a_1 = 1$. Portanto $f(z^{-1}) = z^{-1} + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^{-n}$ para $|z| > 1$. Como a série converge uniformemente, obtemos

$$\oint_{|z|=2} f\left(\tfrac{1}{z}\right)\, dz = \oint_{|z|=2} \frac{dz}{z} + \sum_{n=2} a_n \oint_{|z|=2} \frac{dz}{z^n} = i2\pi.$$

VSFF

Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

ANÁLISE COMPLEXA E EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

TESTE DE RECUPERAÇÃO 2 - 18 DE JUNHO DE 2008 - DAS 11H ÀS 12:30H

Apresente e justifique todos os cálculos

[1,5 val.] 1. Resolva o problema de valor inicial, indicando o intervalo máximo de existência da solução. (sugestão: considere a mudança de variáveis $u = ty$).

$$\frac{dy}{dt} = ty^2 - \frac{y}{t}, \qquad y(1) = 1.$$

Resolução. Sendo $u = ty$ obtemos

$$\begin{aligned} u' &= y + ty' \\ &= y + t^2y^2 - y \\ &= u^2 \\ u^{-2}u' &= 1. \end{aligned}$$

Logo $u^{-1} = c - t$. Aplicando a condição $u(1) = 1 \cdot y(1) = 1$, obtemos $y(t) = \dfrac{1}{t(2-t)}$, e o interval máximo de existência da solução é $\{t \mid 0 < t < 2\}$.

[1,5 val.] 2. Determine a solução da equação seguinte que satisfaz $y(0) = 1$,

$$(3t^2y^2 + t) + (t^3 + 1)yy' = 0\,.$$

(sugestão: a equação possui um factor integrante da forma $\mu = \mu(t)$)

Resolução. Um factor intergrante da forma $\mu = \mu(t)$ tem de verificar a equação seguinte.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y}\left[\mu(t)(3t^2y^2 + 1)\right] &= \frac{\partial}{\partial t}\left[\mu(t)(t^3 + 1)y\right] \\ \mu(t)6t^2y &= \mu'(t)(t^3 + 1)y + \mu(t)3t^2y \\ \mu(t)3t^2y &= \mu'(t)(t^3 + 1)y \\ \frac{3t^2}{t^3 + 1} &= \frac{\mu'(t)}{\mu(t)} \end{aligned}$$

Logo $\mu(t) = t^3 + 1$ é um factor intergrante, e

$$(t^3 + 1)(3t^2y^2 + t) + (t^3 + 1)^2yy' = 0$$

é exacta no plano $\mathbb{R}^2$. A solução é dada implicitamente por $\Phi(t, y) =$ constante, em que

$$\begin{aligned} \Phi_t &= (t^3 + 1)(3t^2y^2 + t) \\ \Phi_y &= (t^3 + 1)^2y. \end{aligned}$$

Resolução. Segue-se que $\Phi(t,y) = (t^3+1)^2y^2/2 + f(t)$ e

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}(t^3+1)^2y^2/2 + f(t) &= (t^3+1)(3t^2y^2+t)\\ (t^3+1)3t^2 + f'(t) &= \\ f'(t) &= (t^3+1)t.\end{aligned}$$

Logo

$$y(t) = \sqrt{\frac{1-t^2-\frac{2}{5}t^5}{(t^3+1)^2}}.$$

3. Considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

[1,5 val.] (a) Determine a solução geral da equação diferencial $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$.

Resolução. O polinómio característico de A é $(1-\lambda)((1+\lambda)^2+1)$. Para $\lambda = 1$, obtemos uma solução $\mathbf{v}_1(t) = e^t \left(\begin{smallmatrix}1\\0\\0\end{smallmatrix}\right)$. Para $\lambda = -1-i$, é facil de ver que $\left(\begin{smallmatrix}0\\i\\1\end{smallmatrix}\right)$ é uma solução não nula da equação $(A+(1+i)I)\mathbf{w} = 0$. Logo $\mathbf{v}_2(t)\,\mathrm{Re}\left(e^{(-1-i)t}\left(\begin{smallmatrix}0\\i\\1\end{smallmatrix}\right)\right)$ e $\mathbf{v}_3(t)\,\mathrm{Im}\left(e^{(-1-i)t}\left(\begin{smallmatrix}0\\i\\1\end{smallmatrix}\right)\right)$ são soluçõe linearmente independentes da equação diferencial $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$. Portanto a solução geral é da forma

$$c_1e^t\left(\begin{smallmatrix}1\\0\\0\end{smallmatrix}\right) + c_2e^{-t}\left(\begin{smallmatrix}0\\ \operatorname{sen} t\\ \cos t\end{smallmatrix}\right) + c_3e^{-t}\left(\begin{smallmatrix}0\\ \cos t\\ -\operatorname{sen} t\end{smallmatrix}\right), \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

[1,0 val.] (b) Determine a solução geral da equação $\mathbf{y}' = A\mathbf{y} + \left(\begin{smallmatrix}0\\0\\1\end{smallmatrix}\right)$.

Resolução. A solução geral da equação é da forma

$$c_1e^t\left(\begin{smallmatrix}1\\0\\0\end{smallmatrix}\right) + c_2e^{-t}\left(\begin{smallmatrix}0\\ \operatorname{sen} t\\ \cos t\end{smallmatrix}\right) + c_3e^{-t}\left(\begin{smallmatrix}0\\ \cos t\\ -\operatorname{sen} t\end{smallmatrix}\right) + \mathbf{v}_p(t), \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R},$$

em que $\mathbf{v}_p(t)$ é uma solução particular. Como a matriz A é não singular, existe único $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ tal que $A\mathbf{v} + \left(\begin{smallmatrix}0\\0\\1\end{smallmatrix}\right) = 0$. Portanto $\mathbf{v} = -A^{-1}\left(\begin{smallmatrix}0\\0\\1\end{smallmatrix}\right)$ é uma solução particular. Logo a solução geral é da forma

$$c_1e^t\left(\begin{smallmatrix}1\\0\\0\end{smallmatrix}\right) + c_2e^{-t}\left(\begin{smallmatrix}0\\ \operatorname{sen} t\\ \cos t\end{smallmatrix}\right) + c_3e^{-t}\left(\begin{smallmatrix}0\\ \cos t\\ -\operatorname{sen} t\end{smallmatrix}\right) - \frac{1}{2}\left(\begin{smallmatrix}0\\1\\1\end{smallmatrix}\right), \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

[1,5 val.] 4. Determine a solução, para $t > 0$, da equação diferencial

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} = \delta(t-1)$$

que satisfaz $y(0) = y'(0) = 0$, em que $\delta(t-1)$ é a distribuição delta de Dirac centrada em 1.

Resolução. Aplicando a transformada de Laplace obtemos

$$\begin{aligned} s^2Y(s) + sY(s) &= e^{-t} \\ Y(s) &= \frac{e^{-t}}{s(s+1)} \\ &= e^{-t}\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}\right). \end{aligned}$$

Logo $y(t) = H(t-1)\left(1 - e^{-(t-1)}\right) = H(t-1)\left(1 - e^{1-t}\right)$, em que

$$H(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases}$$

é a função de Heaviside.

[1 val.] 5. Considere a função $f(x) = |x|$, $x \in]-1, 1[$.

(a) Justifique que a série de Fourier de f no intervalo indicado é uma série de cosenos e determine-a. Indique a soma da série para todo o $x \in \mathbb{R}$.

Resolução. Designa-se por

$$\mathcal{S}(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\pi x) + b_n \operatorname{sen}(n\pi x)$$

a série de Fourier de f. A função f é da classe $\mathcal{C}^0$ e $\mathcal{C}^1$ por partes. Alem disso, f é uma função par. Portanto s série de Fourier de f é uma série pura de cosenos e para cada $x \in \mathbb{R}$ temos $\mathcal{S}(x) = |y|$, em que $x = 2n + y$ e $-1 < y \leq 1$. Os coeficientes são

$$\begin{aligned} a_0 &= 2\int_0^1 x\,dx = 1 \\ a_n &= 2\int_0^1 x\cos(n\pi x)\,dx \\ &= 2\left[\left.\frac{x\operatorname{sen}(n\pi x)}{n\pi}\right|_0^1 - \int_0^1 \frac{\operatorname{sen}(n\pi x)}{n\pi}\,dx\right] \\ &= \frac{2}{n^2\pi^2}((-1)^n - 1). \end{aligned}$$

Portanto

$$\mathcal{S}(x) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos((2n+1)\pi x)}{(2n+1)^2}.$$

[1 val.] (b) Resolva o seguinte problema

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \qquad \frac{\partial u}{\partial x}(t,0) = 0 \qquad \frac{\partial u}{\partial x}(t,1) = 0$$

$$0 < x < 1\,, \quad t > 0 \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = 0 \qquad u(0,x) = 1 + x$$

Resolução. Sendo $u(t,x) = X(x)T(t)$ obtemos

$$\frac{T''}{T} = \frac{X''}{X} = \lambda \qquad X'(0) = 0 \qquad X'(1) = 0$$

$$0 < x < 1\,, \quad t > 0 \qquad T'(0) = 0 \qquad X(x)T(0) = 1 + x$$

Assim obtemos soluções $u_n(t,x) = \cos(n\pi t)\cos(n\pi x)$, para $n = 0, 1, 2$, etc. que verficam

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \qquad \frac{\partial u}{\partial x}(t,0) = 0 \qquad \frac{\partial u}{\partial x}(t,1) = 0$$

$$0 < x < 1\,, \quad t > 0 \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = 0$$

Para obter uma solução que verifica $u(0,x) = 1 + x$, consideremos $\sum_{n=0}^{\infty} c_n u_n(t,x)$. De 5 (a) obtemos

$$u(t,x) = \frac{3}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos((2n+1)\pi t)\cos((2n+1)\pi x)}{(2n+1)^2}.$$

[1,0 val.] 6. Considere a equação diferencial

$$y'' + a(t)y' + b(t)y = 0$$

onde $a(t)$ e $b(t)$ são duas funções contínuas em $\mathbb{R}$. Mostre que, se $w(t)$ é o determinante de uma matriz wronskiana desta equação, então, para todo o $t \in \mathbb{R}$,

$$w(t) = w(0)e^{-\int_0^t a(s)\,ds}\,.$$

(sugestão: encontre uma equação diferencial satisfeita por $w(t)$)

Resolução. Sejam $y_1(t)$ e $y_2(t)$ duas soluções da equação diferencial linearmente independentes. Para $w(t) = y_1(t)y_2'(t) - y_2(t)y_1'(t)$ temos

$$w' = y_1 y_2'' - y_2 y_1''$$

e

$$\begin{aligned} w' + a(t)w &= y_1 y_2'' - y_2 y_1'' + a(t)(y_1(t)y_2'(t) - y_2(t)y_1'(t)) \\ &= y_1(y_2'' + a(t)y_2') - y_2(y_1'' + a(t)y_1') \\ &= y_1(-b(t)y_2) - y_2(-b(t)y_1) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Portanto $w(t) = w(0)e^{-\int_0^t a(s)\,ds}$.