

ANÁLISE COMPLEXA E EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

TESTE 1A - 19 DE ABRIL DE 2008 - DAS 11H ÀS 12:30H

Resolução sumária

1. Seja $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ uma função analítica tal que $\operatorname{Re} f(z) = 2$. Será f uma função constante? Justifique.

Resolução: Escrevendo $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$, temos $u(x,y) = 2$. Substituindo u nas equações de Cauchy-Riemann obtemos

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = \frac{\partial v}{\partial y} \\ 0 = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

logo $\nabla v = 0$. Uma vez que $\mathbb{C}$ é conexo por arcos, conclui-se que v é constante e, portanto, f é constante.

2. Considere a função $f(z) = z + \cos z$.

(a) Calcule $\oint_{|z-1|=3} f(z) dz$.

(b) Calcule $\int_{\gamma} f(z) dz$, em que $\gamma(t) = \pi - \pi e^{it}$, e $0 \leq t \leq \pi$.

Resolução:

(a) Como $f(z)$ é uma função analítica em $\mathbb{C}$, o Teorema de Cauchy garante que o integral de $f(z)$ ao longo de qualquer curva fechada é nulo. Portanto $\oint_{|z-1|=3} f(z) dz = 0$.

(b) Uma primitiva para $f(z)$ é $\frac{z^2}{2} + \sin z$. O ponto inicial do caminho γ é $\gamma(0) = \pi - \pi = 0$ e o ponto final é $\gamma(\pi) = \pi - \pi(-1) = 2\pi$. Logo, pelo Teorema Fundamental do Cálculo,

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \frac{4\pi^2}{2} - 0 = 2\pi^2.$$

Alternativamente, uma vez que f é analítica em $\mathbb{C}$, o Teorema de Cauchy garante que o integral de f depende apenas do ponto inicial e final do caminho de integração. Podemos portanto substituir o caminho γ pelo caminho $\alpha(t) = t$ com $0 \leq t \leq 2\pi$ e substituindo na definição de integral obtemos igualmente

$$\int_{\alpha} f(z) dz = \int_0^{2\pi} (t + \cos t) dt = \left. \frac{t^2}{2} + \sin t \right|_0^{2\pi} = 2\pi^2.$$

3. Considere a função $f(z) = \frac{1}{z(z-1)^3} + e^{\frac{1}{z}}$.

(a) Determine e classifique todas as singularidade de f .

(b) Determine a série de Laurent de f na região $0 < |z| < 1$.

(c) Calcule

$$\oint_{|z|=\frac{1}{2}} f(z) dz. \quad \text{e} \quad \oint_{|z|=2} f(z) dz$$

onde no primeiro integral, a curva é percorrida no sentido positivo e no segundo integral a curva é percorrida no sentido negativo.

Resolução:

- (a) A função f é diferenciável no seu domínio logo as singularidades são $z = 0$ e $z = 1$.
A singularidade $z = 1$ é um pólo triplo uma vez que

$$\lim_{z \rightarrow 1} (z-1)^3 f(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{z} + (z-1)^3 e^{\frac{1}{z}} = 1 + 0 = 1 \neq 0.$$

O ponto $z = 0$ é uma singularidade essencial uma vez que no desenvolvimento de Laurent em $0 < |z| < 1$ calculado na alínea seguinte, o coeficiente de $\frac{1}{z^n}$ é não nulo para todo o $n > 0$.

Alternativamente, para classificar a singularidade $z = 0$, podemos notar que o primeiro termo $\frac{1}{z(z-1)^3}$ tem um pólo simples, uma vez que,

$$\lim_{z \rightarrow 0} z \frac{1}{z(z-1)^3} = -1 \neq 0.$$

Como o segundo termo

$$e^{1/z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{z^n}, \quad \text{para } z \neq 0$$

tem uma singularidade essencial conclui-se que $f(z)$ tem uma singularidade essencial.

- (b) Temos

$$\frac{1}{(z-1)^3} = \frac{1}{2} \frac{d^2}{dz^2} \left(\frac{1}{z-1} \right).$$

Como

$$\frac{1}{z-1} = - \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad \text{para } |z| < 1$$

derivando esta série duas vezes temos

$$\frac{1}{(z-1)^3} = -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) z^{n-2}, \quad \text{para } |z| < 1.$$

e, uma vez que os dois primeiros termos da série acima são nulos,

$$\frac{1}{z(z-1)^3} = \sum_{n=2}^{\infty} -\frac{n(n-1)}{2} z^{n-3}, \quad \text{para } 0 < |z| < 1.$$

Por outro lado,

$$e^{1/z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{z^n}, \quad \text{para } z \neq 0.$$

Associando os termos comuns às séries (que são os termos constantes e em $\frac{1}{z}$) temos

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z} + 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{z^n} - \frac{1}{z} - 3 + \sum_{n=4}^{\infty} -\frac{n(n-1)}{2} z^{n-3} \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{z^n} - 2 + \sum_{n=4}^{\infty} -\frac{n(n-1)}{2} z^{n-3}, \quad \text{para } 0 < |z| < 1. \end{aligned}$$

- (c) Pelo Teorema dos Resíduos,

$$\oint_{|z|=\frac{1}{2}} f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=0} f(z).$$

O resíduo de $f(z)$ em 0 é o coeficiente de $\frac{1}{z}$ no desenvolvimento de Laurent obtido na alínea anterior, que é 0. Portanto

$$\oint_{|z|=\frac{1}{2}} f(z) dz = 0.$$

Da mesma forma, tendo em conta que a orientação da curva é negativa e as singularidades estão ambas no interior da curva, temos

$$\oint_{|z|=2} f(z) dz = -2\pi i \left(\operatorname{Res}_{z=0} f(z) + \operatorname{Res}_{z=1} f(z) \right).$$

Como 1 é um pólo triplo e $e^{\frac{1}{z}}$ é analítica numa vizinhança de $z = 1$ temos

$$\operatorname{Res}_{z=1} f(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{2!} \frac{d^2}{dz^2} \left((z-1)^3 \frac{1}{z(z-1)^3} \right) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{2} \frac{2}{z^3} = 1.$$

Conclui-se que

$$\oint_{|z|=2} f(z) dz = -2\pi i(0+1) = -2\pi i.$$

4. Seja γ_R a curva fechada que limita a região

$$\Omega_R = \left\{ z = \rho e^{i\theta} \mid 0 \leq \rho \leq R, 0 \leq \theta \leq \frac{2\pi}{3} \right\}, \quad \text{em que } R > 1,$$

percorrida no sentido positivo.

(a) Calcule o integral

$$\oint_{\gamma_R} \frac{z}{1+z^3} dz.$$

(b) Calcule o integral real

$$\int_0^\infty \frac{x}{1+x^3} dx.$$

Resolução:

(a) As singularidades da função integranda são as soluções da equação

$$z^3 + 1 = 0 \Leftrightarrow z^3 = e^{i\pi} \Leftrightarrow z = e^{\frac{(\pi+2k\pi)i}{3}}, \quad k = 0, 1, 2.$$

Destas, a única que se encontra no interior do contorno de integração é $e^{\frac{\pi i}{3}}$. Como o denominador $g(z) = z^3 + 1$ se anula em $e^{\frac{\pi i}{3}}$ mas $g'(z)$ não se anula nesse ponto conclui-se que

$$\operatorname{Res}_{z=e^{\frac{\pi i}{3}}} \frac{z}{z^3+1} = \frac{z}{3z^2} \Big|_{z=e^{\frac{\pi i}{3}}} = \frac{1}{3} e^{-\frac{\pi i}{3}}.$$

Pelo Teorema dos resíduos concluímos que

$$\oint_{\gamma_R} \frac{z}{1+z^3} dz = \frac{2\pi i}{3} e^{-\frac{\pi i}{3}} = \frac{2\pi}{3} e^{\frac{\pi i}{6}}.$$

(b) Podemos escrever a fronteira da região Ω_R como a união de três arcos:

$$\gamma_R = [0, R] \cup \delta_R \cup \alpha_R$$

onde δ_R é o arco de circunferência

$$\delta_R = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z| = R, \operatorname{Arg}(z) \in \left[0, \frac{2\pi}{3} \right] \right\}$$

percorrido no sentido positivo e α_R é o segmento de recta

$$\alpha_R = \left\{ z \in \mathbb{C} : 0 \leq |z| \leq R, \operatorname{Arg}(z) = \frac{2\pi}{3} \right\}$$

percorrido na direcção da origem.

O resultado da alínea anterior diz-nos que, para $R > 1$, temos

$$(1) \quad \frac{2\pi}{3} e^{\frac{\pi i}{6}} = \int_0^R \frac{x}{x^3 + 1} dx + \int_{\delta_R} \frac{z}{z^3 + 1} dz + \int_{\alpha_R} \frac{z}{z^3 + 1} dz$$

Como $|z^3 + 1| \geq |z^3| - 1$, temos

$$\left| \int_{\delta_R} \frac{z}{z^3 + 1} dz \right| \leq \int_{\delta_R} \frac{|z|}{|z^3| - 1} ds = \frac{2\pi R}{3} \frac{R}{R^3 - 1}$$

logo este termo tende para 0 quando $R \rightarrow \infty$.

O caminho $\alpha(t) = te^{\frac{2\pi i}{3}}$ com $0 \leq t \leq R$ parametriza o segmento de recta α_R , percorrendo-o no sentido oposto ao pretendido, portanto

$$\int_{\alpha_R} \frac{z}{z^3 + 1} dz = - \int_0^R \frac{te^{\frac{2\pi i}{3}}}{t^3 + 1} e^{\frac{2\pi i}{3}} dt = -e^{\frac{4\pi i}{3}} \int_0^{\infty} \frac{x}{x^3 + 1} dx.$$

Passando ao limite quando $R \rightarrow \infty$ na equação (1) obtém-se portanto

$$(1 - e^{\frac{4\pi i}{3}}) \int_0^{\infty} \frac{x}{x^3 + 1} dx = \frac{2\pi}{3} e^{\frac{\pi i}{6}}.$$

Uma vez que

$$1 - e^{\frac{4\pi i}{3}} = 1 - \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}i}{2}\right) = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2} = \sqrt{3}e^{\frac{\pi i}{6}}$$

concluimos que

$$\int_0^{\infty} \frac{x}{x^3 + 1} dx = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

5. Mostre que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$ define uma função analítica na região $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 1\}$. (Recorde que se define $n^z = e^{z \log n}$ em que $\log$ designa o logaritmo de base natural de um número real.)

Resolução: Como

$$\left| \frac{1}{n^z} \right| = |e^{-z \log n}| = e^{-(\operatorname{Re} z) \log n},$$

dado $s > 1$, temos, para $\operatorname{Re}(z) > s$,

$$|e^{-z \log n}| \leq e^{-s \log n} = \frac{1}{n^s}$$

A série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ é convergente logo, pelo teste de Weierstrass, a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$ converge uniformemente na região

$$\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) > s\}.$$

As funções $\frac{1}{n^z}$ são analíticas nesta região portanto o mesmo acontece com a soma da série. Vemos assim que a expressão

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$$

define uma função analítica em qualquer região da forma $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) > s\}$ com $s > 1$. Como s é arbitrário, conclui-se que a soma está definida e é analítica na região

$$\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 1\}$$

conforme pretendíamos demonstrar.