Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

1º TESTE DE ÁLGEBRA LINEAR
CURSOS: LMAC, MEFT, MEBM

11 de Novembro de 2006 Duração: 1h 30m

I (6 val.)

Considere a matriz real A e o vector coluna $\mathbf{b}$ dados por

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

a) Determine a solução geral do sistema $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Qual a característica de A? Forneça *justificadamente* bases para os espaços das linhas e das colunas de A.

b) Determine quais os valores de $\lambda \in \mathbb{R}$ para os quais $\mathcal{N}(A - \lambda I)$ é não-trivial. Para cada um desses valores, determine uma base e a dimensão de $\mathcal{N}(A - \lambda I)$.

II (6 val.)

Considere, no espaço linear $\mathbb{R}^4$, o conjunto

$$S = \{(1,1,0,1), (0,1,1,0), (0,0,2,-1), (0,1,-1,1)\}.$$

a) Construa *justificadamente* uma base de $L(S)$ formada por elementos de S e indique a dimensão de $L(S)$. Designe por $\mathcal{B}$ a base ordenada assim construída. Quais as coordenadas em $\mathcal{B}$ de $v = (1,3,0,2)$?

b) Mostre que $\mathcal{B}' = \{(1,1,0,1), (1,2,1,1), (1,1,2,0)\}$ forma uma nova base (ordenada) de $L(S)$ e construa a matriz S de mudança de base de $\mathcal{B}$ para $\mathcal{B}'$.

III (5 val.)

Considere, no espaço linear $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, a aplicação $T : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ definida por $T(A) = M\,A$, onde $M = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix}$.

a) Mostre que T é uma transformação linear.

b) Escolha uma base para $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ e determine a representação matricial de T nessa base.

IV (3 val.)

Sejam V um espaço vectorial e U, W subespaços de V. Como foi demonstrado, os conjuntos $U \cap W$ e $U + W = \{v \in V : v = u + w,\ u \in U \text{e}\ w \in W\}$ (resp. *intersecção* e *soma* de U e W) são ainda subespaços de V.

Prove que, no caso de U e W terem ambos dimensão finita, se tem

$$\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W).$$