

Álgebra Linear

Problemas de Avaliação Contínua

Jorge Buescu

Cursos: LMAC, MEBM, MEFT

1^o semestre de 2006/2007

Observação importante!

Estes problemas destinam-se à avaliação contínua dos estudantes. Note-se que os problemas propostos para cada semana estão programados para um investimento de tempo de cerca de *seis horas semanais*, nas quais se inclui a aula prática.

Isto significa, em particular, que *é totalmente errado pensar que o trabalho desenvolvido nas aulas práticas é suficiente para resolver os problemas propostos*. Pelo contrário: no espírito de Bolonha, este método pressupõe o trabalho, individual ou em grupo, dos estudantes fora das aulas, cerca de quatro horas semanais.

A única forma eficaz de o estudante obter rendimento nas aulas práticas é o de comparecer na aula prática tendo já trabalhado em todos os problemas propostos para essa semana e resolvido parte deles, prosseguindo a sua resolução na aula com o apoio do grupo de trabalho e do professor e eventualmente concluindo a sua resolução depois da aula.

1 Sistemas de equações lineares, eliminação de Gauss-Jordan, álgebra de matrizes

P 1.1. Ana: “Se me desses uma moeda, ficaria com o dobro das moedas com que tu ficarias”. Bernardo: “Mas se fosses tu a dar-me uma moeda, ficaríamos ambos com o mesmo número”. Quantas moedas tem cada um?

P 1.2. Eu tenho o dobro da idade que tinha quando o meu pai tinha a idade que eu tenho. Além disso, a soma das nossas idades é 100. Que idades temos?

P 1.3. Resolva, por eliminação de Gauss-Jordan, o sistema de equações $AX = b$, para os seguintes pares (A, b) :

$$(a) A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$(b) A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$(c) A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -3 & 5 & 8 \\ 4 & -1 & -5 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$(d) A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -3 & 5 & 8 \\ 4 & -1 & -5 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(e) A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & -1 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

P 1.4. Determine os coeficientes a, b, c, d por forma a que a curva na figura 1 acima seja o gráfico de uma função $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

P 1.5. Discuta a existência de solução dos seguintes sistemas de equações lineares, em termos dos parâmetros reais α e β :

$$(a) \begin{cases} x + y + z = -2 \\ x - y + z = 3 \\ x + z = 1/2 \\ 3x - y + 3z = \alpha \end{cases} \quad (b) \begin{cases} 2x + 4y + 3z = 10 \\ 2x + 7y - 2z = 10 \\ x + 5y + \alpha z = \beta \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ 5x_3 + 6x_4 = 0 \\ \alpha x_3 + 6x_4 = \beta \\ x_2 + 7x_3 + 8x_4 = 1 \end{cases} \quad (d) \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 14x_4 = 4 \\ 2x_3 + \alpha x_4 = \beta \end{cases}$$

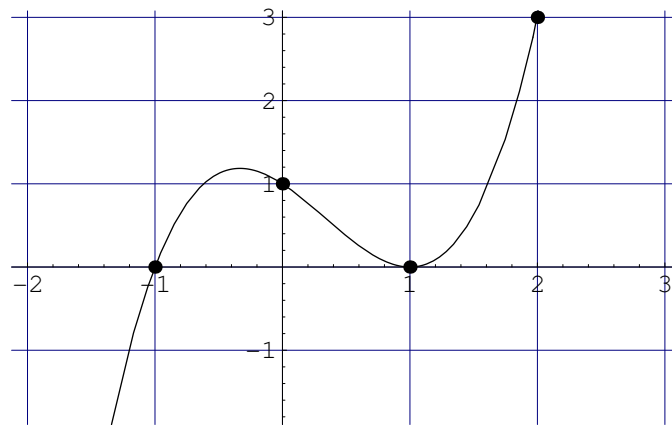


Figura 1: A curva passa pelos pontos $(-1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$, $(2, 3)$ (problema 1.4).

P 1.6. Calcule, sempre que possível, os produtos AB e BA , quando:

$$(a) \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & \sqrt{2} \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ \sqrt{3} & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (b) \quad A = [e^\pi \quad \pi^e], \quad B = \begin{bmatrix} \sqrt[3]{5} \\ -1 \end{bmatrix},$$

$$(c) \quad A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & \sqrt[3]{7} \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

P 1.7. Seja $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Obtenha, por indução, uma fórmula para A^n .

P 1.8. Suponha que A comuta com qualquer matriz 2×2 ; em particular

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ comuta com } \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ e com } \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Mostre que $a = d$ e que $b = c = 0$, pelo que A é um múltiplo da matriz identidade. Estas matrizes, conhecidas como *matrizes escalares*, são as únicas que comutam com todas as outras.

P 1.9. Determine os valores de λ para os quais os seguintes sistemas admitem soluções não triviais. Nesses casos, determine essas soluções e diga qual o seu significado geométrico.

$$(a) \quad \begin{cases} -x + 2y = \lambda x \\ x = \lambda y \end{cases} \quad (b) \quad \begin{cases} 4x + 2y = \lambda x \\ -2x + 8y = \lambda y \end{cases}$$

P 1.10. Determine as inversas das seguintes matrizes:

$$(a) A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \quad (b) B = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \text{sen}(\alpha) \\ -\text{sen}(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}$$

$$(c) C = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 5 \\ 2 & 4 & 4 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} \quad (d) D = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{bmatrix}$$

2 Propriedades de matrizes

P 2.1. Em que condições uma matriz diagonal $n \times n$

$$D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{bmatrix}$$

é invertível, e qual a sua inversa?

P 2.2. Seja P a matriz $n \times n$ que corresponde à operação de troca da linha i com a linha j . Escreva a matriz P e verifique que $P^2 = I$.

P 2.3. Repita o problema anterior para o caso de troca das colunas i e j .

P 2.4. a) Mostre que, se A e B são matrizes quadradas invertíveis com inversas resp. A^{-1} e B^{-1} , então a matriz AB é invertível e a sua inversa é $B^{-1}A^{-1}$.

b) Conclua da alínea anterior que, se A é uma matriz quadrada invertível, então A^n é invertível e $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$.

P 2.5. Mostre que se A_j ($j = 1, 2, \dots, n$) são matrizes $m \times m$ invertíveis, então a matriz $B = A_1A_2 \cdots A_n$ também o é, e determine uma expressão para B^{-1} . (Sug.: inspire-se no problema anterior)

P 2.6. Sendo A e B duas matrizes quadradas, será verdade que se o produto AB se anula, então se tem necessariamente $A = 0$ ou $B = 0$? O que pode concluir no caso em que A é uma matriz invertível?

P 2.7. a) Sejam A, B matrizes tais que está definido o produto matricial $A.B$. Mostre que $(AB)^T = B^T A^T$. (sug.: deve mostrar que $((AB)^T)_{ij} = (B^T A^T)_{ij}$ para todos os i, j).

b) Se A_j ($j = 1, 2, \dots, n$) são matrizes tais que o produto $A_1A_2 \cdots A_n$ está definido, qual a expressão de $(A_1A_2 \cdots A_n)^T$ em função de $A_1^T, A_2^T, \dots, A_n^T$?

Obs.: A notação A^T designa a matriz *transposta* de A . Isto é, dada uma matriz $A_{m \times n}$ de elemento genérico a_{ij} , a matriz A^T é a matriz $n \times m$ cujo elemento na linha i , coluna j é a_{ji} .

3 Característica (*rank*) e núcleo de matrizes

P 3.1. Seja $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ uma matriz 2×2 . Escreva, em função das entradas de A , uma condição necessária e suficiente para que A seja não singular, e determine a expressão da matriz inversa.

P 3.2. Determine a característica de cada uma das seguintes matrizes:

$$\begin{aligned} (a) \quad A &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix} & (b) \quad B &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix} \\ (c) \quad C &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{bmatrix} & (d) \quad D &= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 3 & 4 \\ 5 & -3 & 5 & 10 \end{bmatrix} \\ (e) \quad E_\alpha &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & \alpha \\ -1 & 0 & \alpha^2 & 0 \end{bmatrix} \text{ em função de } \alpha \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

P 3.3. Nos casos das matrizes B, D e E do problema anterior, o que pode dizer sobre as soluções do sistema linear homogêneo correspondente?

P 3.4. Determine a característica das seguintes matrizes $n \times n$:

- A matriz cujas entradas são todas iguais a 1;
- A matriz “tabuleiro de xadrez”, em que a entrada a_{ij} é zero se $i + j$ é par e 1 se $i + j$ é ímpar.

P 3.5. Determine o núcleo (espaço nulo) das seguintes matrizes

$$\begin{aligned} (a) \quad A &= \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 & 0 \\ 4 & 2 & -4 & 0 \end{bmatrix} & (b) \quad B &= \begin{bmatrix} 2 & 6 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ (c) \quad C &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} & (d) \quad D &= \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 9 \\ 2 & 8 & 8 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

4 Espaços lineares

P 4.1. Diga, justificando, quais dos seguintes conjuntos são espaços lineares (considere as operações usuais de adição e multiplicação por um número real).

(a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x + y = 0\}$. Esboce este conjunto enquanto subconjunto de \mathbb{R}^2 .

(b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 2\}$. Esboce este conjunto enquanto subconjunto de \mathbb{R}^2 .

(c) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 0\}$. Esboce este conjunto enquanto subconjunto de \mathbb{R}^2 .

(d) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y - z = 0 \wedge x - 2y - z = 0\}$

(e) Conjunto das matrizes $m \times n$.

(f) Conjunto das matrizes $n \times n$ triangulares inferiores.

(g) Conjunto das matrizes $n \times n$ triangulares inferiores não singulares.

(h) Conjunto das matrizes singulares $n \times n$.

(i) Conjunto das matrizes $n \times n$ que comutam com uma dada matriz A .

(j) $\{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : f(x) = -f(-x)\}$ (funções ímpares)

(k) $\{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : f(x) = f(x + 2\pi)\}$ (funções periódicas de período 2π)

(l) $\{\text{polinómios reais } p(x) \text{ que se anulam em } x = 0\}$

(m) $\{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ tem segunda derivada contínua e } f''(x) + af'(x) + bf(x) = 0\}$, onde a e b são dois números reais dados.

(n) $\{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ tem segunda derivada contínua e } f''(x) + af'(x) + bf(x) = \cos x\}$, onde a e b são dois números reais dados.

P 4.2. Decida se os seguintes conjuntos, munidos das operações indicadas sobre os corpos indicados, possuem ou não a estrutura de espaço linear.

(a) O quádruplo $(\mathbb{R}^+, \oplus, \otimes, \mathbb{R})$, onde \mathbb{R}^+ é o conjunto dos reais positivos, a operação de “soma” \oplus entre dois elementos x e y de \mathbb{R}^+ é definida por $x \oplus y = xy$ e a operação de “multiplicação escalar” entre um elemento $\alpha \in \mathbb{R}$ e um elemento x de \mathbb{R}^+ é definida por $\alpha \otimes x = x^\alpha$.

(b) O quádruplo $(\mathbb{R}, +, \otimes, \mathbb{R})$, onde $+$ é a adição usual de números reais e \otimes é a multiplicação escalar definida por $\alpha \otimes x = \alpha^2 \cdot x$.

(c) O quádruplo $(\mathbb{Q}, +, \times, \mathbb{R})$, onde $+$ e \times são as operações usuais da aritmética dos reais.

(d) O quádruplo $(\mathbb{R}, +, \times, \mathbb{Q})$, onde $+$ e \times são as operações usuais da aritmética dos reais.

(e) O quádruplo $(\mathbb{Z}, \oplus_7, \otimes_7, \mathbb{Z}_7)$, onde \oplus_7 e \otimes_7 são as operações da aritmética modular módulo 7.¹

¹ \mathbb{Z}_7 , ou seja, o conjunto $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ munido das operações de aritmética modular módulo 7, é um corpo. Os alunos mais interessados são convidados a mostrar este facto. Os alunos *ainda* mais interessados são convidados a mostrar que \mathbb{Z}_n é corpo se e só se n é primo. Na verdade, a Álgebra Abstracta permite concluir o seguinte resultado de caracterização dos corpos finitos:

P 4.3. Seja P o plano no espaço tridimensional que tem por equação $3x + 2y + z = 6$. Qual a equação do plano P_0 paralelo a P que passa pela origem? P e P_0 são subespaços de \mathbb{R}^3 ?

P 4.4. Uma matriz quadrada $A_{n \times n}$ diz-se um *quadrado mágico de ordem n* se a soma dos elementos ao longo de qualquer linha, qualquer coluna e de ambas as diagonais (principal e secundária) for constante. Designando o conjunto dos quadrados mágicos de ordem n por Q_n , mostre que Q_n , munido das operações usuais de soma e multiplicação por escalar, forma um espaço vectorial real.

P 4.5. Determine se os seguintes conjuntos de vectores são linearmente independentes ou não. Caso não o sejam, indique um subconjunto linearmente independente com o maior número possível de elementos e escreva os restantes como combinação linear desses vectores.

- (a) Em \mathbb{R}^4 , $u_1 = (1, 1, 1, 1)$, $u_2 = (1, 2, 2, 2)$, $u_3 = (1, 2, 3, 3)$ e $u_4 = (1, 2, 3, 4)$.
 (b) No espaço $\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ das matrizes reais 2×2 ,

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}, A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

- (c) Em \mathbb{R}^3 , $u_1 = (0, 1, 2)$, $u_2 = (1, 0, 2)$, $u_3 = (1, 2, 0)$ e $u_4 = (1, 2, 2)$.

(d) No espaço dos polinómios de grau menor ou igual a 3, $p_1(t) = 1$, $p_2(t) = 1+t$, $p_3(t) = 1+t+t^2$ e $p_4(t) = 1+t+t^2+t^3$.

(e) No espaço dos polinómios de grau menor ou igual a 3, $p_1(t) = 1$, $p_2(t) = 1+t$, $p_3(t) = 1+t^2+t^3$ e $p_4(t) = 1+t+t^2+t^3$.

P 4.6. Descreva, por meio de esboços em \mathbb{R}^2 ou em \mathbb{R}^3 (de acordo com o que for apropriado para cada caso), o espaço das colunas e o núcleo da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}.$$

Forneça uma base para o espaço das colunas.

existe um corpo finito com n elementos se e só se $n = p^k$, onde p é primo. Mais ainda: esse corpo é único (a menos de isomorfismo). O corpo finito com p^k elementos é conhecido como *corpo de Galois* $GF(p^n)$; veja-se p. ex. van der Waerden, *Algebra*, vol. I. Os corpos de Galois têm recentemente encontrado aplicações surpreendentes, por exemplo, em áreas de criptografia e Teoria de Codigos; veja-se p. ex. R. Hill, *A first course in coding theory*.

5 Bases e dimensão

P 5.1. Indique, justificando, qual a dimensão dos seguintes espaços lineares, e, no caso de dimensão finita, indique uma base.

(a) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - z = 0\}$. Esboce este espaço enquanto subespaço de \mathbb{R}^3 .

(b) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - z = 0 \wedge x - y = 0\}$. Esboce este espaço enquanto subespaço de \mathbb{R}^3 .

(c) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - z = 0 \wedge x - y = 0 \wedge y - z = 0\}$. Esboce este espaço enquanto subespaço de \mathbb{R}^3 .

(d) Matrizes reais $m \times n$, com as operações usuais de adição e multiplicação por um número real.

(e) $L(S)$, onde S é o subconjunto do espaço das funções reais de variável real, com as operações usuais, definido por $S = \{\cos^2(t) - \sin^2(t), \cos(2t) + \sin(t), \sin(t)\}$.

(f) Espaço nulo da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 2 & 6 & 10 \\ 3 & 7 & 11 \\ 4 & 8 & 12 \end{bmatrix}.$$

(g) Espaço das colunas da matriz A da alínea (f).

(h) Espaço das linhas da matriz A da alínea (f).

(i) Espaço das sucessões reais que verificam a relação $\alpha_k = \alpha_{k-1} + 2\alpha_{k-2}$, $k = 3, 4, \dots$

(j) Espaço das funções reais da variável real que se anulam em $x = 1$.

P 5.2. Seja V o espaço linear dos polinómios de variável real de grau menor ou igual a 3, com as operações usuais de adição e multiplicação por um número real.

(a) Diga qual a dimensão de V e indique uma base ordenada. Justifique. Indique as coordenadas do polinómio $(1 - t^2)(1 + t)$ nessa base.

(b) Considere o subconjunto $S \subset V$ dado por $S = \{1 - 2t, 1 + t^2, t, 1 + 2t - 3t^2, t^2\}$. Diga, justificando, se S é linearmente independente.

(c) Diga qual a dimensão do espaço linear $L(S)$, e determine uma base desse espaço. Justifique.

(d) Seja T o subconjunto de todos os polinómios de V que se anulam em 0. Diga se T é um subespaço linear. Em caso afirmativo, indique a sua dimensão e uma base. Justifique.

P 5.3. Recordando, se necessário, a definição (problema 4.4), determine uma base e a dimensão de Q_2 , espaço dos quadrados mágicos 2×2 .

P 5.4. Para cada um dos seguintes conjuntos F de funções reais, seja G o conjunto formado pelas derivadas de todas as ordens dessas funções (incluindo ordem 0, ou seja as próprias funções de F). Diga qual a dimensão de $L(G)$ e, no caso de essa dimensão ser finita, indique, justificando, uma base do espaço.

- (a) $F = \{ e^{-t}, (t \in \mathbb{R}) \}$ (b) $F = \{ e^{-t}, e^t, (t \in \mathbb{R}) \}$
 (c) $F = \{ \cos(t), (t \in \mathbb{R}) \}$ (d) $F = \{ t^2, (t \in \mathbb{R}) \}$
 (e) $F = \{ e^t, \cos(t), (t \in \mathbb{R}) \}$ (f) $F = \{ \frac{1}{t}, (t \neq 0) \}$

P 5.5. Considere, no espaço linear real $\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ das matrizes 2×2 , o conjunto $S = \{M_1, M_2, M_3, M_4\}$, onde

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, M_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, M_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, M_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

- a) Construa uma base de $L(S)$, espaço gerado por S , e indique a respectiva dimensão.
 b) Mostre que o conjunto $W = \{M \in L(S) : m_{12} = 0\}$ forma um subespaço de $L(S)$ e determine uma base para W . Determine as coordenadas do vector $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ nessa base.

P 5.6. Seja $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ o espaço linear real dos polinómios de grau ≤ 2 , e $\mathcal{B}_c = \{1, t, t^2\}$ a sua base canónica.

- a) Mostre que $\mathcal{B}_1 = \{1, 1 + t, 1 + t + t^2\}$ é uma nova base de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.
 b) Determine a matriz de mudança de base S da base ordenada \mathcal{B}_c para a base ordenada \mathcal{B}_1 .

P 5.7. Seja $\mathcal{B}_c = \{e_1, e_2\}$ a base canónica (ordenada) de \mathbb{R}^2 .

- a) Determine a matriz de mudança de base de \mathcal{B}_c para

$$\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}.$$

- b) Seja

$$\mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}.$$

Determine a matriz de mudança de base de \mathcal{B}_c para \mathcal{B}_2 e de \mathcal{B}_2 para \mathcal{B}_c .
 Calcule as componentes dos vectores $v_1 = \begin{bmatrix} 7 \\ 10 \end{bmatrix}$ e $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ na base \mathcal{B}_2 .

- c) Determine as matrizes de mudança de base de \mathcal{B}_1 para \mathcal{B}_2 e de \mathcal{B}_2 para \mathcal{B}_1 .
Forte sugestão: utilize as alíneas anteriores!)

P 5.8. Determine a matriz de mudança de base S da base canónica de \mathbb{R}^3 para a base ordenada

$$\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ 0 \\ \text{sen} \alpha \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\text{sen} \alpha \\ 0 \\ \cos \alpha \end{bmatrix} \right\}.$$

Mostre que S é uma matriz **ortogonal** (recorde o problema 8.4) e que $S^T = S^{-1}$ (recorde: S^T designa a transposta de S). Qual o significado geométrico desta igualdade?

P 5.9. Existe um subconjunto de \mathbb{R}^3 linearmente independente sobre o corpo \mathbb{Q} mas linearmente dependente sobre o corpo \mathbb{R} ?

P 5.10. O conjunto dos números reais forma um espaço linear sobre o corpo \mathbb{R} de dimensão 1. Mostre que, enquanto espaço linear sobre o corpo \mathbb{Q} , ele possui dimensão infinita.

6 O corpo dos complexos

P 6.1. Escreva os seguintes números complexos sob a forma $a + bi$:

$$(a) (1 - i)^3; \quad (b) \frac{2}{4 + 3i}; \quad (c) \frac{1 + i}{1 - i}; \quad (d) (-i)^n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

P 6.2. Sejam $z_1 = a_1 + ib_1$ e $z_2 = a_2 + ib_2$ dois números complexos. Mostre que:

a) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$;

b) $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \overline{z_2}$;

c) $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$.

P 6.3. Escreva os seguintes números complexos sob a forma polar:

$$(a) 2; \quad (b) 3i; \quad (c) 1 - i; \quad (d) (1 - i)^n, \quad n \in \mathbb{N}; \quad (e) \sqrt{1 - i}; \quad (f) \sqrt[3]{i}.$$

P 6.4. Esboce os seguintes conjuntos no plano complexo:

a) $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$.

b) $\{z \in \mathbb{C} : |z - 1 + \sqrt{2}i| = 2\}$.

c) $\{z \in \mathbb{C} : |z - 1| = |z + 1|\}$.

d) $\{z \in \mathbb{C} : z = 1 - i + (1 + i)t, \quad t \in \mathbb{R}\}$.

P 6.5. Seja $p(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n = \sum_{k=0}^n a_k z^k$ um polinómio de coeficientes reais — isto é, todos os coeficientes $a_k \in \mathbb{R}$.

a) Mostre que $p(\bar{z}) = \overline{p(z)}$ para qualquer $z \in \mathbb{C}$.

b) Conclua que se $\lambda = a + ib$, com $a, b \in \mathbb{R}$ e $b \neq 0$, é raiz de $p(z)$ (isto é, verifica $p(\lambda) = 0$), então $\bar{\lambda} = a - ib$ também o é.

c) Mostre que um polinómio de $3^{\text{º}}$ grau a coeficientes reais que possua uma raiz complexa com parte imaginária não-nula possui três raízes distintas.

d) Calcule todas as raízes complexas de $z^3 - z^2 + z - 1$.

P 6.6. Demonstre, utilizando as fórmulas de Euler, que para todo o $\theta \in \mathbb{R}$

a) $\cos 3\theta = \cos^3 \theta - 3 \sin^2 \theta \cos \theta$;

b) $\sin 3\theta = -\sin^3 \theta + 3 \cos^2 \theta \sin \theta$.

P 6.7. Seja \mathbb{C}^2 o espaço linear sobre o corpo dos complexos definido por $\{(z, w) : z, w \in \mathbb{C}\}$ através das operações usuais entre complexos.

- Determine a dimensão e construa uma base deste espaço.
- Existe um conjunto de três vectores linearmente independentes em \mathbb{C}^2 ? Em caso afirmativo forneça um exemplo.
- Quais as condições sobre os escalares α e β para que os vectores $(1, \alpha)$ e $(1, \beta)$ sejam linearmente independentes em \mathbb{C}^2 ?

P 6.8. Repita o problema anterior para o espaço linear *sobre o corpo dos reais* $\tilde{\mathbb{C}}^2$, definido por $\tilde{\mathbb{C}}^2 = \{(z, w) : z, w \in \mathbb{C}\}$ através das operações usuais entre complexos.

P 6.9. Sejam I, J, K , respectivamente, as matrizes de entradas complexas

$$I = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad J = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}.$$

Mostre que estas matrizes verificam as relações de comutação $I^2 = J^2 = K^2 = -\mathbf{1}$, $IJ = -JI = K$, $JK = -KJ = I$, $KI = -IK = J$, onde $\mathbf{1}$ é a identidade 2×2 .

Observação. As quatro matrizes $\{I, J, K, \mathbf{1}\}$ formam a base de uma *álgebra de divisão* de dimensão 4 sobre o corpo dos reais. Isto significa que, se sobre o espaço linear por elas gerado se definir a multiplicação de vectores pelas regras acima, se obtém um conjunto fechado para as várias operações. Note-se, no entanto, que ele tem propriedades especiais: por exemplo, a multiplicação *não é comutativa*.

Esta álgebra, descoberta pelo matemático irlandês William Rowan Hamilton em 1843, dá pelo nome de Álgebra dos Quaterniões e tem importantes aplicações em Física e Matemática. Por exemplo, Frobenius mostrou em 1877 que as únicas álgebras de divisão (i.e. sem divisores de zero) reais são \mathbb{R} (de dimensão 1), \mathbb{C} (de dimensão 2) e a Álgebra dos Quaterniões (de dimensão 4). Neste sentido preciso, não é possível construir uma álgebra real maior do que a dos Quaterniões sem perder estrutura matemática.

Em Física, é possível deduzir de forma concisa e muito mais elegante do que com Análise vectorial clássica as equações de Maxwell, de Dirac e as transformações de Lorenz. O estudante interessado pode consultar o artigo de J. Lambek “If Hamilton had prevailed: quaternions in physics”, *Mathematical Intelligencer* 4 (1995), 7 - 15 e referências aí citadas.

7 Transformações lineares

P 7.1. Determine se a transformação $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada é ou não linear. Em caso afirmativo, calcule a matriz que a representa em relação à base dos vectores coordenados unitários.

- (a) $T(x, y, z) = (y, z, x)$ (b) $T(x, y, z) = (x, y^2, z^3)$
 (c) $T(x, y, z) = (y - z, x - z, 0)$ (d) $T(x, y, z) = (0, y, e^z)$
 (e) $T(x, y, z) = (2x - y + 3z, y + 2z, -2z)$

P 7.2. Considere a transformação $T_\theta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ que roda cada ponto do plano por um ângulo fixo θ em torno da origem no sentido directo.

- a) Verifique que T_θ é uma transformação linear.
 b) Calcule a matriz que representa T_θ em relação à base dos vectores coordenados unitários.
 c) *Sem realizar cálculos*, indique a matriz que representa $(T_\theta)^{-1}$.
 d) Usando a alínea b) e a correspondência entre composição de transformações lineares e produto de matrizes, represente matricialmente a relação $T_\phi \circ T_\theta = T_{\theta+\phi}$. Que fórmulas suas conhecidas ficam assim demonstradas ?

P 7.3. Construa geometricamente a imagem do rectângulo $ABCDE$ da figura 2 por efeito da transformação linear representada, na base canónica, por cada uma das seguintes matrizes:

- a) A rotação $R_{\pi/2} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.
 b) A rotação $R_{\pi/4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.
 c) A “distorção” $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}$.
 d) A transformação de Lorentz $L_2 = \begin{bmatrix} 5/4 & 3/4 \\ 3/4 & 5/4 \end{bmatrix}$.
 e) A transformação de corte $S_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.
 f) A transformação de corte $S_2 = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 3/2 \end{bmatrix}$.

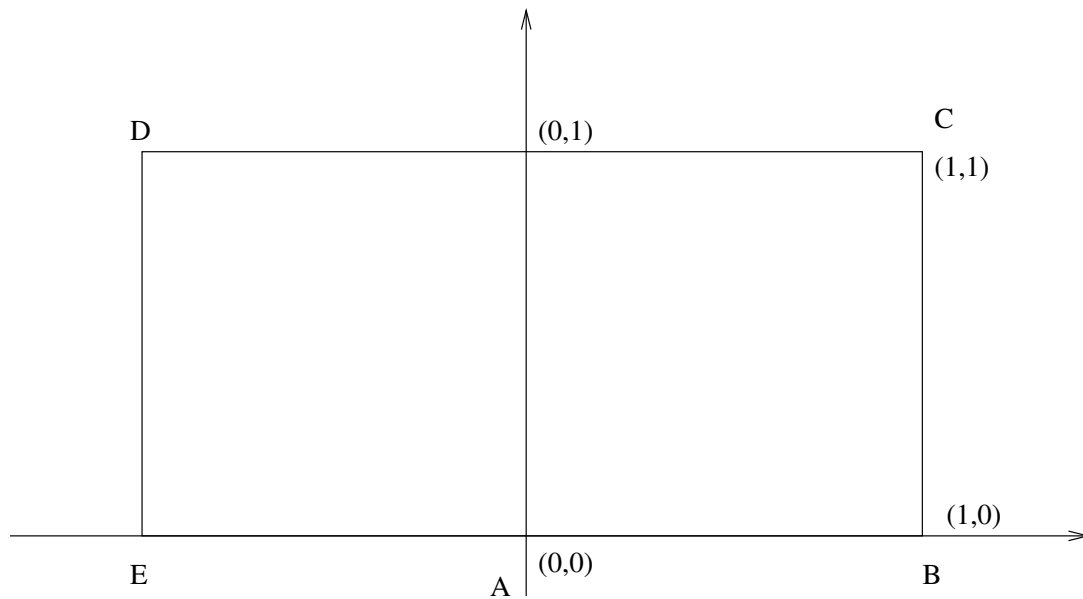


Figura 2: Rectângulo $ABCDE$ cujas imagens se pretende construir (problema 7.3).

g) A reflexão $E_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

h) A reflexão $E_{\pi/4} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

i) A projecção $P_{\pi/4} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$.

j) A transformação nilpotente $N_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

k) A transformação nilpotente $N_{\pi/4} = \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$.

P 7.4. Considere, no plano \mathbb{R}^2 , as transformações lineares R , rotação em torno da origem no sentido inverso por um ângulo de $\pi/2$, e E , reflexão no eixo dos yy .

- Calcule, em relação a bases à sua escolha, as matrizes A_R e A_E que representam respectivamente R e E .
- Mostre, a partir de a), que $R \circ E \neq E \circ R$.

- c) Represente geometricamente os vectores da base canónica e os seus transformados através de $R \circ E$ e de $E \circ R$.

P 7.5. Construa, para cada uma das seguintes transformações de \mathbb{R}^3 em \mathbb{R}^3 , a matriz que a representa na base canónica:

- a) Reflexão do vector $[x, y, z]^t$ no plano yz .
 b) Rotação do vector $[x, y, z]^t$ por um ângulo θ em torno do eixo yy' , no sentido directo quando observado dos yy positivos.
 c) Projecção do vector $[x, y, z]^t$ no plano yz .

P 7.6. Considere, no espaço vectorial \mathbb{R}^3 , as bases ordenadas $\mathcal{B}_1 = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$, base canónica, e $\mathcal{B}_2 = \{[-1 \ 1 \ 1]^t, [-1 \ -1 \ 1]^t, [0 \ 0 \ 1]^t\}$.

- a) Determine a matriz S que realiza a mudança de base de \mathcal{B}_1 para \mathcal{B}_2 .
 b) Dado um vector $u = x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2 + x_3\bar{e}_3$, isto é, de coordenadas $[x_1 \ x_2 \ x_3]^t$ na base \mathcal{B}_1 , determine as suas coordenadas $[y_1 \ y_2 \ y_3]^t$ na base \mathcal{B}_2 (**Sugestão:** Inverta S).
 c) Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ cuja representação matricial na base canónica é

$$\begin{bmatrix} 2 & -4 & -4 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

Usando os resultados de a) e b), determine a matriz que representa T na base \mathcal{B}_2 .

P 7.7. Seja $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ o espaço linear real dos polinómios de grau ≤ 2 , e $T : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ a transformação linear definida por $T(1+t^2) = 2t$, $T(t^2) = 2t$, $T(1+t) = 1$.

- a) Determine a matriz A que representa T na base canónica de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.
 b) Determine a matriz B que representa T na base ordenada $\{1, 1+t, 1+t+t^2\}$. Indique a matriz de mudança de base S tal que $B = S^{-1}AS$. **Obs.: recorde o problema 5.6!**

P 7.8. Considere a transformação linear $T : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ definida por $T(z_1, z_2) = (z_1 + z_2, iz_2)$. Determine as representações matriciais de T :

- a) na base canónica de \mathbb{C}^2 $\mathcal{B} = \{(1, 0), (0, 1)\}$;
 b) na base $\mathcal{B}' = \{(-1 - i, 2), (1, 0)\}$.

Qual das representações lhe parece mais agradável? Porquê?

P 7.9. Como sabe, uma transformação linear $T : V \rightarrow W$ entre espaços de dimensão finita, fixas bases em V e W , é univocamente determinada por uma matriz A_T .

Construa bases para os espaços imagem e núcleo, indicando as respectivas dimensões, quando A_T é dada por cada uma das matrizes abaixo. Em cada caso, verifique o teorema da dimensão.

$$a) A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 5 & 5 & -5 \\ 6 & 11 & -7 \end{bmatrix} \quad b) A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad c) A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

P 7.10. Seja P_n o espaço linear dos polinómios de grau menor ou igual a n .

(a) Mostre que a transformação $T : P_3 \rightarrow P_3$ definida por

$$T(p) = p'' + ap' + bp,$$

onde a e b são números reais, é uma transformação linear.

(b) Determine a representação matricial para T em relação à base ordenada $\{1, t, t^2, t^3\}$.

(c) Discuta a dimensão do núcleo de T em termos de a e b . Em cada caso, indique uma base para o núcleo.

(d) Utilize os resultados da alínea anterior para determinar as soluções em P_3 da equação diferencial

$$p'' + ap' + bp = 0.$$

(e) Utilize os resultados da alínea (c) para determinar todas as soluções em P_3 da equação diferencial

$$p'' + ap' + bp = 1 - t^2.$$

P 7.11. Seja V o espaço linear real das matrizes reais de 2×2 de entradas a_{ij} satisfazendo $a_{11} + a_{22} = 0$, $a_{12} + a_{21} = 0$, e considere as seguintes matrizes de V :

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

(a) Mostre que H e J são linearmente independentes. Determine a dimensão e indique uma base para V .

(b) Dada a transformação linear $T : V \rightarrow V$ definida através das seguintes relações:

$$T(H) = J, \quad T(J) = -H$$

determine a matriz que representa T em relação a uma base contendo H e J .

(c) Determine a característica e a dimensão do núcleo de T , e indique justificadamente se é invertível.

(d) Calcule todas as soluções U da equação linear $T(U) = B$ onde $B = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & -a \end{bmatrix}$.

P 7.12. Seja V um espaço linear de dimensão finita e $T : V \rightarrow V$ uma transformação linear de V em V . Pode T ser injetiva mas não sobrejectiva? Pode T ser sobrejectiva mas não injetiva?

P 7.13. A Teoria da Relatividade Restrita afirma que a relação entre as coordenadas espacio-temporais (x, y, z, t) e (x', y', z', t') de dois referenciais de inércia que se deslocam um em relação ao outro com velocidade v é dada por

$$\begin{cases} x' = \beta(x - vt), \\ y' = y, \\ z' = z, \\ t' = \beta(t - \frac{v}{c^2}x), \end{cases}$$

onde c é a velocidade da luz, $|v| < c$ e $\beta = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$. A transformação linear

que passa dos sistemas de coordenadas (x, t) para (x', t') chama-se *transformação de Lorentz*.

- Determine a matriz L_v que representa a transformação de Lorentz na base canónica de \mathbb{R}^2 .
- Mostre que $L_0 = I$ e que L_v é não-singular.
- Demonstre a *lei relativística de adição das velocidades*: $L_v L_u = L_w$, onde $w = \frac{u + v}{1 + \frac{uv}{c^2}}$. Compare com o resultado clássico e comente.

8 Determinantes

P 8.1. Calcule os determinantes das seguintes matrizes:

$$\text{a) } \begin{bmatrix} u & v \\ w & x \end{bmatrix}, \quad \text{b) } \begin{bmatrix} 1 & 2 & 10 \\ 2 & 4 & 100 \\ 3 & 6 & \frac{1000}{\pi} \end{bmatrix}, \quad \text{c) } \begin{bmatrix} 0 & 7 & 6 \\ 5 & 8 & 5 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{d) } \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{e) } D_\lambda = \begin{bmatrix} \lambda - 4 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 2 \\ 0 & 0 & \lambda - 1 \end{bmatrix},$$

onde no último caso λ é um parâmetro real. Aproveite para deduzir quais os valores de λ para os quais a matriz D_λ é singular.

P 8.2. Seja

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Determine todos os valores de $\lambda \in \mathbb{R}$ tais que a matriz $A - \lambda I$ é singular.

P 8.3. Utilize determinantes para calcular a característica da matriz $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & 1 \\ 7 & 8 & 9 & 1 \end{bmatrix}$.

Observação: o problema **não** pede que calcule o determinante de uma matriz não-quadrada, que como sabe **não está sequer definido**.

Dada uma matriz $A_{m \times n}$ de característica r , consegue conjecturar um resultado geral sobre determinantes de submatrizes de A ?

P 8.4. Diz-se que uma matriz A com coeficientes reais é **ortogonal** se $AA^T = I$.

a) Mostre que se A é uma matriz ortogonal então $\det(A) = \pm 1$.

b) Mostre que existe uma matriz ortogonal A tal que $\det(A) = -1$.

P 8.5. Seja A uma matriz $n \times n$. Mostre por indução em n que $\det(A) = \det(A^T)$ (Sug.: Utilize a fórmula de Laplace).

P 8.6. a) Seja $A(x)$ a matriz

$$\begin{bmatrix} 2-x & 3 & 4 \\ 0 & 4-x & -5 \\ 1 & -1 & 3-x \end{bmatrix},$$

cujas entradas dependem da variável real x . Calcule $\det(A(x))$, e em seguida $\frac{d}{dx} \det(A(x))$.

- b) Defina D_k , $k = 1, 2, 3$, como a matriz obtida de A substituindo as entradas da linha i pelas suas derivadas; isto é,

$$(D_k)_{ij} = \begin{cases} a_{ij}(x), & j \neq k \\ a'_{ij}(x) & j = k \end{cases}$$

Calcule a soma $\det(D_1(x)) + \det(D_2(x)) + \det(D_3(x))$. O que observa? Consegue conjecturar algum resultado geral?

9 Valores próprios e vectores próprios

P 9.1. Determine os valores próprios e vectores próprios (complexos) de cada uma das seguintes matrizes, identificando em cada caso as multiplicidades algébrica e geométrica:

$$\text{a) } \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{b) } \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}, \quad \text{c) } \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{d) } \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

P 9.2. Seja $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma transformação linear que possui uma representação matricial

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

em relação à base canónica. Mostre que T possui uma representação matricial diagonal.

P 9.3. Sejam A e B matrizes $n \times n$ com coeficientes num corpo. Mostre que se $I - AB$ é não-singular, então $I - BA$ é não-singular e

$$(I - BA)^{-1} = I + B(I - AB)^{-1}A.$$

Sug.: Recorde que uma matriz C é singular se e só se 0 é valor próprio de C .

P 9.4. Seja A a matriz $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$.

- Determine os valores próprios e os vectores próprios da transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ que é representada por A em relação à base canónica.
- Determine os valores próprios e os vectores próprios da transformação linear $S : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ que é representada por A em relação à base canónica.

P 9.5. Uma matriz R diz-se *matriz de rotação* se é ortogonal e $\det R = 1$. Mostre que uma rotação num espaço de dimensão *ímpar* deixa fixos os vectores de pelo menos um subespaço de dimensão 1 (eixo de rotação) — isto é, $+1$ é valor próprio de R . (Sug.: considere $\det(R - I)$.)

P 9.6. Seja $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

- Mostre que existe uma matriz P tal que $P^{-1}AP$ é diagonal.
- Determine os valores próprios e vectores próprios de A^{10} .

P 9.7. a) Forneça um exemplo de uma matriz de inteiros 2×2 cujos valores próprios sejam irracionais.

b) Podem a soma e/ou o produto dos valores próprios de uma matriz $n \times n$ de elementos racionais ser irracionais?

P 9.8. Um senhor comprou, no princípio de um mês, um par de coelhos. No fim do segundo mês havia três coelhos; no fim do terceiro mês havia cinco; e, em geral, no final do mês n o número de coelhos é a soma dos coelhos dos dois meses anteriores.

a) Designando número de coelhos no fim do n -ésimo mês por C_n , tem-se pois que $C_n = C_{n-1} + C_{n-2}$. Mostre que

$$\begin{bmatrix} C_{n-1} \\ C_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

b) Calcule $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, onde $x, y \in \mathbb{R}$ e n é um inteiro positivo.

P 9.9. Seja $C^1[(0, 1)]$ o espaço das funções reais continuamente diferenciáveis no intervalo $(0, 1)$ e $T : C^1[(0, 1)] \rightarrow C^1[(0, 1)]$ o operador linear definido por $T(f)(x) = x f'(x)$. Determine os valores próprios e vectores próprios de T .

Observação: pode ser-lhe útil verificar que

$$\frac{d}{dx} [\log |f(x)|] = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

P 9.10. Seja A uma matriz $n \times n$ com polinómio característico $f(x) = (c_1 - x)^{d_1} \dots (c_k - x)^{d_k} = \det(A - xI)$. Mostre que $\text{tr}(A) = c_1 d_1 + \dots + c_k d_k$.

P 9.11. Seja $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ uma transformação linear que possui uma representação matricial

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \end{bmatrix}$$

em relação à base canónica. Quais são as condições sobre a, b , e c para que \mathbb{R}^4 possua uma base de vectores próprios da transformação T ?

10 Forma Canónica de Jordan

P 10.1. Determine a Forma Canónica de Jordan J , a base de vectores próprios generalizados e a matriz S tal que $J = S^{-1}AS$ para as matrizes:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}; A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

P 10.2. Determine “por inspeção” a Forma Canónica de Jordan de cada uma das seguintes matrizes, indicando as multiplicidades algébrica e geométrica de cada um dos valores próprios:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}; D = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

P 10.3. O *traço* de uma matriz $A_{n \times n}$ é a soma dos elementos da diagonal principal: $tr(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$.

- Mostre que o traço de uma matriz é invariante por transformações de semelhança, isto é, se $B = S^{-1}AS$, então $tr(A) = tr(B)$.
- Tomando acima $J = S^{-1}AS$, conclua que $tr(A) = \sum_{i=1}^n \lambda_i$, onde λ_i , $i = 1, \dots, n$ são os valores próprios de A incluindo multiplicidades.

P 10.4. Como já foi demonstrado na devida altura, o determinante de uma matriz $A_{n \times n}$ é invariante por transformações de semelhança, isto é, se $B = S^{-1}AS$, então $\det(A) = \det(B)$. Deduza, de forma análoga ao problema anterior, que $\det(A) = \prod_{i=1}^n \lambda_i$, onde λ_i , $i = 1, \dots, n$ são os valores próprios de A incluindo multiplicidades.

P 10.5. Dada uma matriz $A_{n \times n}$, defina formalmente para $t \in \mathbb{R}$ a matriz exponencial

$$e^{At} = I + At + \frac{A^2 t^2}{2!} + \dots + \frac{A^r t^r}{r!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!},$$

ignorando de momento questões de convergência da série.

- Sendo J a Forma Canónica de Jordan de A (isto é, tal que $J = S^{-1}AS$), mostre que

$$e^{At} = S e^{Jt} S^{-1}.$$

- Para as matrizes A_1 e A_2 do problema 10.1, calcule desta forma $e^{A_1 t}$ e $e^{A_2 t}$ (Nota: observe que em ambos os casos já calculou S , e que e^{Jt} é (quase) trivial de calcular!)

Observação. A determinação da *exponencial de uma matriz*, que acabou de fazer, é um problema crucial para sistemas dinâmicos. A matriz e^{At} fornece a solução geral da equação diferencial linear a coeficientes constantes $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$. (Se esta observação hoje não lhe diz nada, não se preocupe).

11 Produtos internos

P 11.1. Seja $\langle \cdot, \cdot \rangle$ o produto interno usual de \mathbb{R}^2 . Sejam $\alpha = (1, 2)$ e $\beta = (-1, 1)$. Mostre que existe um vector γ de \mathbb{R}^2 tal que $\langle \alpha, \gamma \rangle = -1$ e $\langle \beta, \gamma \rangle = 3$.

P 11.2. Seja V um espaço linear sobre o corpo dos números reais \mathbb{R} ou dos complexos \mathbb{C} com um produto interno, que se designa por $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

- Mostre que $\langle 0, \beta \rangle = 0$ qualquer seja $\beta \in V$.
- Mostre que se $\langle \alpha, \beta \rangle = 0$ qualquer seja $\beta \in V$, então $\alpha = 0$.
- Se $\alpha, \beta \in V$ mostre que $\alpha = \beta$ se e só se $\langle \alpha, \gamma \rangle = \langle \beta, \gamma \rangle$ qualquer seja $\gamma \in V$.

P 11.3. Seja V um espaço linear real ou complexo. Mostre que se $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ e $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$ são produtos internos em V , então $\langle \cdot, \cdot \rangle_1 + \langle \cdot, \cdot \rangle_2$ é um produto interno em V . O conjunto dos produtos internos em V é um espaço linear?

P 11.4. Determine todos os produtos internos do espaço linear real \mathbb{R} e do espaço linear complexo \mathbb{C} .

Problema extra (não é para avaliação). Na aula teórica demonstrou-se a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica para quaisquer dois números reais positivos $a, b \geq 0$:

$$(ab)^{1/2} \leq \frac{a+b}{2}$$

sendo válida a igualdade se e só se $a = b$.

Mostre que este facto implica a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica para n reais positivos, isto é, dados $a_1, a_2, \dots, a_n \geq 0$, então

$$(a_1 a_2 \dots a_n)^{1/n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \quad (1)$$

sendo válida a igualdade se e só se $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

Sugestão: Comece por provar que (1) é válida se $n = 2^k$ for uma potência de 2. Se n não for uma potência de 2, construa uma sequência apropriada de $N = 2^k > n$ números positivos dos quais os primeiros n são a_1, \dots, a_n , aplicando o resultado anterior.

P 11.5. Utilize a desigualdade de Cauchy-Schwarz em \mathbb{R}^n munido do produto interno usual para provar os seguintes resultados:

- Se a_1, a_2, \dots, a_n são números reais tais que $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1$, então $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 \geq 1/n$.

b) Se p_1, p_2, \dots, p_n e x_1, x_2, \dots, x_n são reais *positivos*, então

$$(p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n)^2 \leq (p_1 + p_2 + \dots + p_n) (p_1 x_1^2 + p_2 x_2^2 + \dots + p_n x_n^2).$$

c) Se a, b, c são reais positivos, $(a^2 b + b^2 c + c^2 a) (ab^2 + bc^2 + ca^2) \geq 9a^2 b^2 c^2$.

d) Se x_1, x_2, \dots, x_n e y_1, y_2, \dots, y_n são reais *positivos*, então

$$\sum_{k=1}^n x_k y_k \leq \left(\sum_{k=1}^n k x_k^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^n y_k^2 / k \right)^{1/2}.$$

P 11.6. Seja \mathcal{P}_1 o espaço linear real de polinômios com coeficientes reais de grau menor ou igual um.

a) Mostre que a função

$$\langle a_0 + a_1 x, b_0 + b_1 x \rangle = a_0 b_0 + \frac{a_0 b_1}{2} + \frac{a_1 b_0}{2} + \frac{a_1 b_1}{3}$$

define um produto interno em \mathcal{P}_1 .

b) Determine uma matriz A tal que

$$\langle a_0 + a_1 x, b_0 + b_1 x \rangle = [a_0 \ a_1] A \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \end{bmatrix}.$$

P 11.7. Determine um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ de \mathbb{R}^2 tal que $\langle (1, 0), (0, 1) \rangle = 2$.

P 11.8. Seja V o espaço linear complexo das matrizes $n \times n$ com coeficientes complexos.

a) Mostre que $\langle A, B \rangle = \text{tr}(AB^*)$ é um produto interno em V , onde tr é o traço e $B^* = \bar{B}^t$.

b) Determine o subespaço ortogonal ao subespaço das matrizes diagonais.

P 11.9. Considere o espaço euclidiano real V das sucessões $\{u_n\}$ de números reais tais que $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ é convergente, com o produto interno definido por

$$\langle \{u_n\}, \{v_n\} \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n.$$

Esta série é absolutamente convergente para todas as sucessões $\{u_n\}, \{v_n\} \in V$. Considere também o conjunto $S \subset V$ das sucessões com um número finito de termos não-nulos.

- a) Mostre que S é um subespaço de V .
- b) Determine os subespaços S^\perp , $(S^\perp)^\perp$ e $S + S^\perp$.
- c) Prove que S tem dimensão infinita.
- d) Mostre que $V \setminus S$ possui um número infinito de vectores linearmente independentes. $V \setminus S$ é subespaço de V ?

P 11.10. Aplicando o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt aos vectores

$$\beta_1 = (1, 0, 1), \beta_2 = (1, 0, -1), \beta_3 = (0, 3, 4)$$

obtenha uma base ortonormal de \mathbb{R}^3 em relação ao produto interno usual.

P 11.11. a) Escreva uma equação cartesiana do plano perpendicular à recta

$$x - 5 = 2y - 4 = z$$

e que contém o ponto $(5, 4, 0)$.

- b) Escreva equações cartesianas que definem a recta que é perpendicular ao subconjunto afim definido por $Ax + By + Cz = \sqrt{2}$, com $(A, B, C) \neq (0, 0, 0)$, e que contém a origem.

P 11.12. Seja V o espaço linear real de dimensão 2, e considere a função $F : V \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ definida por $F(x, y) = \sqrt{(x - y)^2 + 3y^2}$.

a) Mostre que F é uma norma, ou seja, que para todos os $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^2$ se tem

- i) $F(\alpha) \geq 0$ e $F(\alpha) > 0$ se $\alpha \neq 0$;
- ii) $F(c\alpha) = |c|F(\alpha)$ para todo o $c \in \mathbb{R}$;
- iii) $F(\alpha + \beta) \leq F(\alpha) + F(\beta)$.

b) Mostre que $\langle \alpha, \beta \rangle = \frac{1}{2}[F^2(\alpha + \beta) - F^2(\alpha) - F^2(\beta)]$ é um produto interno.

c) Designa-se por E a projecção ortogonal, relativamente ao produto interno definido em b), de V sobre o subespaço gerado pelo vector $(3, 4) \in V$. Determine uma fórmula para $E(x, y)$.

P 11.13. Seja V um espaço euclideo de dimensão n com uma base ortonormal

$$\mathcal{B} = \{\beta_1, \dots, \beta_n\}.$$

Dada uma transformação linear $T : V \rightarrow V$, mostre que a matriz que representa T em relação à base \mathcal{B} é

$$[a_{ij}] = \langle T(\beta_j), \beta_i \rangle.$$

P 11.14. Seja V um espaço linear. Diz-se que uma transformação linear $P : V \rightarrow V$ é uma **projecção** se $P^2 = P \circ P = P$.

- a) Seja $P : V \rightarrow V$ uma projecção. Mostre que a transformação linear $\tilde{P} = I - P$ definida por $\tilde{P}(v) = v - P(v)$ é uma projecção.
- b) Seja $W = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2\} \subset \mathbb{R}^2$, e seja $\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = x_1y_1 + x_2y_2$ o produto interno usual. Mostre que existe uma projecção $P : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que a imagem de P é W mas P não é a projecção ortogonal de \mathbb{R}^2 sobre W .

12 Formas quadráticas

P 12.1. Classifique as seguintes matrizes quanto a serem (semi)definidas positivas, negativas, ou indefinidas (a é um parâmetro real).

$$(a) \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad (b) \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \quad (c) \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & a \end{bmatrix} \quad (d) \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & a & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

P 12.2. Considere a seguinte forma quadrática em \mathbb{R}^2 , representada em termos da base canónica por

$$Q(x) = x^2 + 4xy + ay^2,$$

onde a é um número real. Determine os valores de a para os quais Q é definida positiva. Indique uma forma quadrática diagonal correspondente, e uma matriz diagonalizante.

P 12.3. Considere no espaço linear \mathbb{R}^3 a função

$$f(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{x}^t A \bar{y},$$

onde $\bar{x} = [x_1 \ x_2 \ x_3]^t$, $\bar{y} = [y_1 \ y_2 \ y_3]^t$, e a matriz A é dada por

$$A = \begin{bmatrix} 3 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Mostre que f define um produto interno em \mathbb{R}^3 .

P 12.4. Seja A uma matriz real simétrica $n \times n$. Prove que A^2 é definida positiva se e só se A for não singular.

P 12.5. Sendo A e B matrizes reais simétricas, mostre através de um exemplo que os valores próprios da matriz AB podem não ser reais. E se uma das matrizes consideradas for definida positiva?