Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

2º TESTE / 1º EXAME DE ÁLGEBRA LINEAR

CURSOS: MEBM, MEFT, LMAC

4 de Janeiro de 2007 Teste: 1h 30m. Exame: 3h.

Teste: apenas grupos III, IV e V (a).

I (APENAS EXAME) (4,5 val.)

Considere a matriz real A_α e o vector $b \in \mathbb{R}^3$ dados por

$$A_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & \alpha \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \beta \end{bmatrix},$$

onde $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$.

a) Discuta o sistema de equações lineares $A_\alpha x = b$, e sempre que este seja possível determine a sua solução geral.

b) Construa justificadamente, **em função de** α, bases para o espaço das linhas $\text{lin}(A_\alpha)$, espaço das colunas $\text{col}(A_\alpha)$ e núcleo $\mathcal{N}(A_\alpha)$.

c) Calcule o determinante de A_α e diga para que valores de α é A_α invertível. Determine a matriz inversa de A_α para $\alpha = 2$.

d) Determine, quando A_α não é invertível, a equação cartesiana de $\mathcal{N}(A_\alpha)$.

II (APENAS EXAME) (4 val.)

Considere, no espaço vectorial $\mathbb{R}^4$, o subconjunto

$$S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 = x_3, x_2 = 2x_4\}$$

e a função $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definida por

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_2 + x_3, x_2 + x_4, x_1 + x_2 + x_3, 2x_2 + 2x_4).$$

a) Mostre que S é um subespaço de $\mathbb{R}^4$. Determine uma sua base e a sua dimensão.

b) Mostre que T é uma transformação linear e determine uma sua representação matricial.

c) Determine o núcleo $\mathcal{N}(T)$ da transformação T, indique a sua dimensão e uma base. A transformação T é invertível?

d) Determine a intersecção de $\mathcal{N}(T)$ com S. O que pode concluir quanto à invertibilidade da restrição de T a S? Porquê?

III (TESTE E EXAME) (4,5 val.)

Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

a) Determine os valores próprios de A e respectivas multiplicidades algébrica e geométrica. Para cada valor próprio determine o espaço próprio associado. A matriz A é diagonalizável? Justifique.

b) Determine a forma canónica de Jordan J da matriz A, bem como a correspondente matriz S tal que $J = S^{-1}AS$.

c) Aproveite os resultados anteriores para calcular A^{100}.

IV (TESTE E EXAME) (4 val.)

Considere o espaço linear real $C^0([-1,1])$ das funções reais contínuas no intervalo $[-1,1]$.

a) Mostre que $\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)\, dt$ define um produto interno em $C^0([-1,1])$.

Considere nas perguntas seguintes o espaço euclidiano obtido munindo $C^0([-1,1])$ com o produto interno definido na alínea a).

b) Seja S o subespaço de $C^0([-1,1])$ gerado pelos polinómios $\{1, x, x^2\}$. Construa, pelo processo de Gram-Schmidt, uma base ortonormada para S.

c) Determine qual o polinómio de S mais próximo de $p(x) = 5x^3$, bem como a distância correspondente.

V (TESTE: apenas a). EXAME: a), b)) (3 val.)

Uma matriz complexa $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ diz-se *hermitiana* se $A = A^*$, onde A^* designa a matriz transconjugada de A. Pode mostrar-se que matrizes hermitianas são sempre diagonalizáveis.

a) Sejam A e B matrizes hermitianas. Mostre que A e B são simultaneamente diagonalizáveis (isto é, existe uma matriz não-singular S tal que $S^{-1}AS$ e $S^{-1}BS$) *se e só se* $AB = BA$.

b) Mostre que os valores próprios de uma matriz hermitiana A são reais. O conjunto das matrizes hermitianas forma um espaço linear real? Forma um espaço linear complexo?