Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

1^{o} TESTE DE ÁLGEBRA LINEAR

CURSOS: LMAC, LEFT

18 de Novembro de 2000 Duração: 1h 30m

I (6 val.)

Considere a matriz dependente do parâmetro real β

$$A_\beta = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & \beta \end{bmatrix}.$$

a) Discuta a natureza do sistema $A_\beta.\mathbf{X} = \mathbf{b}$ em função de $\beta \in \mathbb{R}$ e de $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$.

b) Para $\beta = -3$, determine o núcleo de A, indique qual a sua dimensão e forneça uma base para $\mathcal{N}(\mathcal{A})$. Diga, justificando, qual a dimensão do espaço das colunas de A e forneça uma sua base.

II (6 val.)

Considere, no espaço linear $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ dos polinómios reais de grau ≤ 2, o subconjunto $S = \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$, onde $p_1(t) = 1$, $p_2(t) = 1 - t + t^2$, $p_3(t) = 1 + t - t^2, p_4(t) = 1 + t + t^2$.

a) Construa uma base de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ formada por elementos de S.

b) Construa a matriz S de mudança de base da base canónica de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ para a base que determinou, e calcule S^{-1}. Aproveite o resultado para exprimir $p(t) = 1 + \sqrt{2}t + \pi t^2$ como combinação linear dos vectores da nova base.

III (5 val.)

Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$. Calcule, através de determinantes, os valores de $\lambda \in \mathbb{R}$ para os quais a matriz $A - \lambda I$ é singular. Para cada um desses valores determine uma base e a dimensão de $\mathcal{N}(A - \lambda I)$.

IV (3 val.)

Sejam $x_1, x_2, \ldots, x_m$ números reais distintos, i.e. $x_i \neq x_j$ se $i \neq j$. Considere a matriz $m \times n$

$$V = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & x_m & x_m^2 \cdots & x_m^{n-1} \end{bmatrix}.$$

a) Mostre que, se $n \leq m$, as colunas de V são linearmente independentes.

b) Deduza do resultado anterior que, dado um conjunto $S = \{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_m, y_m)\}$ de m pontos no plano com $x_i \neq x_j$ se $i \neq j$, existe um único polinómio $p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{m-1} x^{m-1}$ de grau $m - 1$ que passa por todos os pontos de S.