Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

1º TESTE DE ÁLGEBRA LINEAR A
CURSOS: LEA, LEBM, LEFT, LMAC

19 de Novembro de 2005 Duração: 1h 30m

I (6 val.)

Considere a matriz real A e o vector coluna $\mathbf{b}_\alpha$ dependente do parâmetro real α dados por

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b}_\alpha = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \alpha \end{bmatrix}.$$

a) Discuta o sistema $A.\mathbf{X} = \mathbf{b}_\alpha$ em função de α. Sempre que ele seja possível construa a sua solução geral. Nesses casos identifique claramente uma solução particular do sistema não-homogéneo e a solução geral do sistema homogéneo associado.

b) Determine o núcleo de A (sug.: baseie-se na alínea anterior). Forneça uma base para $\mathcal{N}(A)$ e indique qual a sua dimensão. Diga, justificando, qual a dimensão do espaço das colunas de A e forneça uma sua base. Diga, justificando, qual a dimensão do espaço das linhas de A e forneça uma sua base.

II (6 val.)

Considere o conjunto $S \subset \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ definido por $S = \{1 + t - t^3, 1 - t^2 - t^3, 1 + 2t + t^2 - t^3, 1 + t + t^3\}$.

a) Construa justificadamente uma base de $L(S)$ formada por elementos de S e indique a dimensão de $L(S)$.

b) Mostre que $W = \{p \in L(S) : p(0) = p'(0)\}$ forma um subespaço de $L(S)$, determine justificadamente a sua dimensão e forneça uma sua base. Determine as coordenadas de $q(t) = 1 + t - \pi^2 t^3$ nessa base.

III (5 val.)

Considere a aplicação $T : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ definida por

$$T(A) = \frac{A + A^T}{2},$$

onde A^T designa a matriz transposta de A.

a) Mostre que T é uma transformação linear.

b) Escolha uma base para $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ e determine a representação matricial de T nessa base.

IV (3 val.)

O conjunto $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ munido das operações da aritmética modular (mod 2) forma um corpo. Seja n um inteiro positivo e $V = \{i \in \mathbb{Z} : 0 \leq i \leq 2^n\}$. Defina operações de soma vectorial $\oplus$ e de multiplicação escalar $\odot$ por forma a que, munido destas operações, V possua a estrutura de espaço vectorial sobre $\mathbb{Z}_2$.