Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

1º TESTE DE ÁLGEBRA LINEAR

CURSOS: LMAC, LEFT

18 de Novembro de 2000 Duração: 1h 30m

I (6 val.)

Considere a matriz real

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 6 & 9 \\ 2 & 6 & 7 & 6 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

a) Construa a solução geral de $A.\mathbf{X} = \mathbf{b}$, onde $\mathbf{b} = (1,\, 2,\, 4\, -1)^t$.

a) Determine o núcleo de A, indique qual a sua dimensão e forneça uma base para $\mathcal{N}(\mathcal{A})$. Diga, justificando, qual a dimensão do espaço das colunas de A e forneça uma sua base.

II (6 val.)

Considere, no espaço linear $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ dos polinómios reais de variável real, o subconjunto $S = \{p_1,\, p_2, p_3\}$, onde $p_1(t) = 1 + t - 2t^2 + t^3$, $p_2(t) = t^2 - t^3$, $p_3(t) = 1 + t - 2t^2 + 3t^3$.

a) Determine a dimensão de $L(S)$, espaço gerado por S, e indique uma base de $L(S)$.

b) Mostre que o conjunto $W = \{p \in L(S) : p(0) = p(1)\}$ forma um subespaço de $L(S)$ e determine uma base para W. Determine as coordenadas do vector $p(t) = 1 + t - t^2$ nessa base.

III (5 val.)

Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$.

a) Calcule, através de determinantes, os valores de $\lambda \in \mathbb{R}$ para os quais a matriz $A - \lambda I$ é singular. Para cada um desses valores determine uma base e a dimensão de $\mathcal{N}(A - \lambda I)$.

b) Considere o conjunto $\mathcal{B}$ formado pela união das bases de $\mathcal{N}(A - \lambda I)$ para os valores atrás determinados de λ. Mostre que $\mathcal{B}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$ e escreva a matriz S de mudança de base de $\mathcal{B}_{can}$ para $\mathcal{B}$.

IV (3 val.)

Seja $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{5}, \sqrt{8})$ o subconjunto de $\mathbb{R}$ definido por

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{5}, \sqrt{8}) = \{x \in \mathbb{R} \,:\, x = r_1 + r_2\sqrt{2} + r_3\sqrt{5} + r_4\sqrt{8}, \text{ com } r_1,\, r_2,\, r_3,\, r_4 \in \mathbb{Q}\}.$$

Mostre que $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{5}, \sqrt{8})$, munido das operações usuais entre reais, é espaço linear sobre $\mathbb{Q}$, construa uma sua base e diga qual a sua dimensão.

Obs.: Pode usar o facto de $\forall n \in \mathbb{N}\ \sqrt{n}$ ou é inteira (no caso de n ser um quadrado perfeito) ou irracional.