Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

2^{o} EXAME DE ÁLGEBRA LINEAR

CURSOS: LMAC, LEFT

31 de Janeiro de 2001 Duração: 3h

I (6 val.)

Considere a matriz real A dada por

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ -1 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}.$$

a) Discuta, em função do parâmetro real β, o sistema de equações lineares $A.\mathbf{X} = \mathbf{b}$, onde $\mathbf{b} = [-2, 0, 1, \beta]^T$, e determine a sua solução geral sempre que possível.

b) Determine as dimensões de $\mathcal{N}(A)$ e de $\operatorname{col}(A)$, bem como bases para cada um destes subespaços.

c) Determine os valores próprios de A e respectivas multiplicidades algébricas.

d) Determine os subespaços próprios de A e as multiplicidades geométricas dos respectivos valores próprios. A matriz A é diagonalizável?

II (6 val.)

Considere, no espaço linear $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ dos polinómios reais de grau ≤ 2 a transformação $T : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ definida por

$$T(p) = (x^2 + 1)\, p'' + x\, p'.$$

a) Mostre que T é uma transformação linear. Fixe uma base de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ e determine a representação matricial de T relativamente a este base.

b) Construa bases para os subespaços $\mathcal{N}(T)$, $\mathcal{I}(T)$.

Observação: pretendem-se os vectores da base — não a sua representação em coordenadas!

c) Mostre que a função $f : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(p_1, p_2) = p_1(0)p_2(0) + p_1(1)p_2(1) + p_1(2)p_2(2) + p_1(3)p_2(3)$$

define um produto interno.

d) Relativamente ao produto interno definido por f, qual é o elemento de $\mathcal{N}(T)$ mais próximo de $q(x) = x$?

III (5 val.)

Seja $\mathcal{S}_2$ o subconjunto do espaço linear das matrizes 2×2 reais formado pelas matrizes simétricas.

a) Mostre que $\mathcal{S}_2$ é subespaço de $\mathcal{M}_{2\times 2}$. Construa (justificadamente) uma base de $\mathcal{S}_2$ e diga qual a dimensão de $\mathcal{S}_2$.

b) Considere a função $T : \mathcal{S}_2 \to \mathcal{S}_2$ definida por $T(A) = (AM + MA)/2$, onde M é a matriz

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Mostre que T é uma transformação linear e construa a sua representação matricial relativamente à base de $\mathcal{S}_2$ escolhida em (a).

c) Determine os valores próprios de T, bem como os subespaços próprios correspondentes.

d) Determine, relativamente ao produto interno do traço em $\mathcal{M}_{2\times 2}$, o vector de $\mathcal{S}_2$ mais próximo de

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Observação: O produto interno do traço, caso já não se recorde, é definido por $\langle A, B\rangle = \ \mathrm{tr}(A.B^T)$.

IV (3 val.)

Sejam P, Q transformações lineares de $\mathbb{R}^n$ diagonalizaáveis. Mostre que P comuta com Q *se e só se* P e Q são *simultaneamente diagonalizáveis*, isto é, se e só se existe uma base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^n$ tal que as representações matriciais de P e de Q nessa base são ambas diagonais. Qual a relação entre os espectros de P e Q e de PQ que este facto implica?