Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

2º TESTE / 1º EXAME DE ÁLGEBRA LINEAR

CURSOS: LMAC, LEFT

15 de Janeiro de 2001 Duração: 1h 30 (teste) / 3h (exame)

TESTE: APENAS III, IV e V(a) — EXAME: TODOS OS GRUPOS

I - APENAS EXAME

Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ cuja representação matricial em relação à base canónica é dada por

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

a) Determine a solução geral de $T(\mathbf{v}) = \mathbf{b}$, onde $\mathbf{b} = \mathbf{e_1} + 2\mathbf{e_2} + 3\mathbf{e_3} + 3\mathbf{e_4}$.

b) Determine as dimensões de $\mathcal{N}(T)$ e de $\mathcal{I}(T)$, bem como bases para cada um destes subespaços.

c) Seja $\mathcal{B}'$ uma outra base de $\mathbb{R}^4$ e A' a representação matricial de T nesta base. Qual o determinante de A'? Porquê?

d) *Sem calcular o polinómio característico de* A, que afirmações pode neste momento fazer sobre as suas raízes?

II - APENAS EXAME

Considere, no espaço linear $C^\infty(\mathbb{R})$ das funções reais de variável real indefinidamente diferenciáveis, o conjunto $S = \{\operatorname{sen} x, \cos x, e^x\}$.

a) Mostre que S é um conjunto linearmente independente. Qual a dimensão de $L(S)$?

b) Mostre que o operador derivação $D : L(S) \to L(S)$ é linear. Tomando S para base de $L(S)$, construa a representação matricial de $D : L(S) \to L(S)$.

c) Determine os valores próprios, reais e complexos, de $D : L(S) \to L(S)$ e respectivas multiplicidades algébrica e geométrica.

d) Construa justificadamente todos os subespaços invariantes não-triviais de $L(S)$ por acção de D.

III -EXAME E TESTE

Seja V o subespaço do espaço linear das matrizes 2×2 reais formado pelas matrizes triangulares superiores.

a) Escolha (justificadamente) uma base e diga qual a dimensão de V.

b) Considere a função $T : V \to V$ definida por $T(A) = M.A$, onde

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Mostre que T é uma transformação linear e construa a sua representação matricial relativamente à base escolhida em (a).

c) Determine os valores próprios de T, bem como os subespaços próprios correspondentes.

d) A transformação T é diagonalizável? Em caso afirmativo, forneça uma base de V relativamente à qual T tenha representação diagonal.

IV - EXAME E TESTE

Dados dois vectores u e v de $\mathbb{R}^3$, considere a função real definida por $f(u, v) = u^t G v$, onde

$$G = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

a) Mostre que f define um produto interno em $\mathbb{R}^3$.

b) Seja S o subespaço gerado por $(2, -1, 3)^T$. Determine o seu complemento ortogonal $S^\perp$ relativamente a este produto interno.

c) Determine, pelo processo de Gram-Schmidt, bases ortonormadas para S e $S^\perp$ (relativamente a este produto interno).

d) Determine a distância do ponto $a = (0, 1, 0)^T$ a S.

V - TESTE: APENAS PARTE (a)

Seja $A_{m\times n}$ e $B_{n\times m}$ matrizes reais.

a) Mostre que, se $n = m$, os espectros de AB e de BA coincidem.

b) **(APENAS EXAME)** Explique porque é que, se $n \neq m$, os polinómios característicos de AB e BA não podem ser iguais. Mostre que mesmo nesse caso os espectros de AB e de BA coincidem, com a eventual excepção de um valor próprio zero.