Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

2º EXAME DE ÁLGEBRA LINEAR A
CURSOS: LEA, LEBM, LEFT, LMAC

19 de Janeiro de 2005 Duração: 3h.

I (5 val.)

Considere a matriz real A dada por

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 3 & 3 \end{bmatrix}.$$

a) Determine a característica e a dimensão do núcleo de A.

b) Construa justificadamente bases para o espaço das linhas $\mathrm{lin}(A)$, espaço das colunas $\mathrm{col}(A)$ e núcleo $\mathcal{N}(A)$. Qual o valor do determinante de A? Justifique.

c) Calcule $A\,\mathbf{x}$, onde $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}^T$. O que conclui sobre o vector $\mathbf{x}$? Aproveite este facto para determinar todos os valores próprios de A e respectivas multiplicidades algébrica e geométrica. A matriz A é diagonalizável? (Sug.: pode ser-lhe útil recordar a propriedade fundamental do traço de uma matriz.)

d) Determine uma base para $\mathcal{N}(A)^\perp$, onde o complemento ortogonal é tomado em relação ao produto interno usual de $\mathbb{R}^n$.

II (5 val.)

Considere, no espaço vectorial $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, o subconjunto W definido por

$$W = \{M \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : M = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix},\ a,\, b \in \mathbb{R}\}.$$

a) Mostre que W é um subespaço linear de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Forneça justificadamente uma base de W e diga qual a sua dimensão.

b) Seja $C = \begin{bmatrix} c & d \\ -d & c \end{bmatrix}$, com $c,\, d \in \mathbb{R}$. Mostre que a função $T : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ definida por $T(M) = C\,M$ é uma transformação linear. Mostre que W é invariante por T (isto é, $T(W) \subseteq W$). Fica pois bem definida a restrição de T a W, designada por $T_{|W}$.

c) Construa a representação matricial da transformação $T_{|W}$ da alínea anterior em relação a uma base de W à sua escolha.

d) Construa um isomorfismo $I : W \to \mathbb{C}$ entre W e o espaço linear real $\mathbb{C}$ que preserve a multiplicação (isto é, tal que $I(M_1 M_2) = I(M_1)I(M_2)$). Dada uma matriz não-nula $A \in W$ e um inteiro $n \geq 1$, o que lhe permite a existência deste isomorfismo afirmar sobre o número de soluções em W da equação $X^n = A$?

III (4 val.)

Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 4 & -7 & -4 \\ -5 & 6 & 2 \end{bmatrix}.$$

a) Determine os valores próprios de A e respectivas multiplicidades algébrica e geométrica. Para cada valor próprio determine o espaço próprio associado. A matriz A é diagonalizável? Justifique.

b) Determine justificadamente a forma canónica de Jordan J da matriz A, bem como a correspondente matriz S tal que $J = S^{-1}AS$.

IV (3 val.)

Considere, no espaço linear $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ dos polinómios reais de grau ≤ 2, a função $F : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ definida por

$$F(p_1, p_2) = p_1(-1)\, p_2(-1) \; + \; p_1(0)\, p_2(0) \; + p_1(1)\, p_2(1).$$

a) Mostre que F define um produto interno em $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

Considere, nas questões seguintes, o espaço euclidiano $\mathcal{P}_2(\mathbb{R}), F$ obtido munindo o espaço $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ do produto interno $F(\cdot, \cdot)$.

b) Seja $p_0(t) = 1 + t - t^2$ e $S = L(\{p_0\})$ o subespaço gerado por p_0. Determine $S^{\perp}$ (complemento ortogonal de S) e construa uma sua base ortonormada **(em relação ao produto interno definido por F)**.

c) Seja $q(t) = 1 + t$. Determine o ponto de S mais próximo de q e a distância de q a S **(em relação ao produto interno definido por F)**.

V (3 val.)

Uma matriz $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ diz-se *hermitiana* se $A = A^*$, onde A^* designa a matriz transposta conjugada de A. Se A é hermitiana, pode provar-se que

(1) os seus valores próprios são reais,

(2) A é diagonalizável e os seus vectores próprios podem tomar-se ortonormados em relação ao produto interno usual em $\mathbb{C}^n$ (isto é, $\langle \mathbf{z}, \mathbf{w} \rangle = \mathbf{w}^*\mathbf{z}$).

Pode usar os factos (1) e (2) nas questões seguintes.

a) Seja A hermitiana e $\lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_k$ um subconjunto dos valores próprios de A associados respectivamente aos vectores próprios ortonormados $\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_k}$. Mostre que

$$\lambda_1 \leq \frac{\mathbf{x}^* A \mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|^2} \leq \lambda_k$$

para todo o $\mathbf{x} \in L(\{\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_k}\})$.

b) Prove que a função $G : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$

$$G(\mathbf{z}, \mathbf{w}) = \mathbf{w}^* A \mathbf{z}$$

define um produto interno se e só se A é hermitiana e todos os seus valores próprios são estritamente positivos.[1]

[1] Matrizes com esta característica dizem-se *definidas positivas*.