Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

2º TESTE / 1º EXAME DE ÁLGEBRA LINEAR A
CURSOS: LEA, LEBM, LEFT, LMAC

5 de Janeiro de 2005 Teste: 1h 30m. Exame: 3h.

Teste: apenas grupos III, IV e V (a).

I (APENAS EXAME) (4,5 val.)

Considere a matriz real $A(\alpha)$ dependente do parâmetro real α dada por

$$A(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & \alpha+2 & -\alpha \\ -1 & 2 & \alpha & 0 \end{bmatrix}.$$

a) Determine, **em função de** α, a característica e a dimensão do núcleo de $A(\alpha)$.

b) Construa justificadamente, **em função de** α, bases para o espaço das linhas $\mathrm{lin}(A(\alpha))$, espaço das colunas $\mathrm{col}(A(\alpha))$ e núcleo $\mathcal{N}(A(\alpha))$.

c) Calcule o determinante de $A(\alpha)$ e diga quando é invertível $A(\alpha)$.

d) Determine, no caso em que $A(\alpha)$ não é invertível, uma base para $\mathcal{N}(A(\alpha))^\perp$, onde o complemento ortogonal é tomado em relação ao produto interno usual de $\mathbb{R}^n$.

II (APENAS EXAME) (4 val.)

Considere, no espaço linear $C^\infty(\mathbb{R})$ das funções reais indefinidamente diferenciáveis, o conjunto $S = \{f_1, f_2\}$, onde $f_1(t) = e^{at}\cos bt$ e $f_2(t) = e^{at}\mathrm{sen}\, bt$, onde a, $b \in \mathbb{R}$ com $b \neq 0$. Designe por $D : C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R})$ o operador derivação.

a) Mostre que f_1 e f_2 são linearmente independentes. Diga justificadamente qual a dimensão de $L(S)$ e forneça uma sua base.

b) Mostre que o subespaço $L(S)$ é invariante por D, ou seja, $D(L(S)) \subseteq L(S)$. Note que, consequentemente, fica bem definido um operador derivação $D_{|L(S)}$ restrito a $L(S)$.

c) Construa uma representação matricial de $D_{|L(S)} : L(S) \to L(S)$. Mostre que $D_{|L(S)}$ é invertível para todos os a, $b \in \mathbb{R}$ com $b \neq 0$ e determine uma representação matricial da transformação inversa.

d) Designando por P a transformação inversa de $D_{|L(S)}$, utilize os resultados anteriores para determinar $P(f_1)$ e $P(f_2)$.[1]

III (TESTE E EXAME) (4,5 val.)

Considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Determine os valores próprios de A e respectivas multiplicidades algébrica e geométrica. Para cada valor próprio determine o espaço próprio associado. A matriz A é diagonalizável? Justifique.

[1] O operador P designa-se geralmente por *primitivação* e $P(f_1)$ e $P(f_2)$ por *funções primitivas* de f_1 e f_2, respectivamente.

b) Determine a forma canónica de Jordan J da matriz A, bem como a correspondente matriz S tal que $J = S^{-1}AS$.

IV (TESTE E EXAME) (4 val.)

Considere o espaço linear $\mathbb{R}^3$ munido do produto interno usual $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Seja $\mathbf{v} = (2, 1, 0)$. Considere a transformação linear $P : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida, para todo o $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$, por $P(\mathbf{u}) = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \, \mathbf{v}$.

a) Determine $\mathcal{N}(P)$ e $\mathcal{N}(P)^{\perp}$ e indique as respectivas dimensões.

b) Construa uma base ortonormada para $\mathcal{N}(P)$.

c) Determine qual o ponto de $\mathcal{N}(P)$ mais próximo de $(1, 1, 1)$, bem como a distância correspondente.

d) Determine os valores próprios e vectores próprios de P.

V (TESTE: apenas a). EXAME: a) e b)) (3 val.)

Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ uma matriz real $n \times n$ com valores próprios reais λ_j verificando $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n$.

a) Prove que existe uma matriz real B tal que $B^2 = A$. Quantas matrizes diferentes existem satisfazendo $B^2 = A$?

b) Prove que, se $\mathbf{v}$ é vector próprio de A, então $\mathbf{v}$ é vector próprio de B. Mostre porque é que estes factos implicam que existe uma única matriz B com todos os valores próprios positivos tal que $B^2 = A$.