Exercícios de Álgebra Linear

2º Semestre 2008/2009

LEIC, LEGM, LMAC, MEFT, MEBiom e MEC

João Ferreira Alves/Ricardo Coutinho

1 Sistemas de Equações Lineares e Matrizes

Exercício 1 *Resolva por eliminação de Gauss os seguintes sistemas de equações lineares:*

a) $\begin{cases} x+2y=1 \\ x+3y=0 \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} 2x+3y=1 \\ 4x+6y=2 \end{cases}$ *c)* $\begin{cases} 4x+5y=1 \\ 12x+15y=0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x+y=1 \\ 3x-y=2 \\ x-y=0 \end{cases}$ *e)* $\begin{cases} 2a+2b+3c=1 \\ a+2b+c=0 \\ a-b+c=0 \end{cases}$ *f)* $\begin{cases} x+2y+3z=1 \\ 4x+7y+7z=3 \\ 2x+3y+z=0 \end{cases}$

g) $\begin{cases} x+2y+z=0 \\ 4x+10y+10z=0 \\ x+3y+4z=0 \end{cases}$ *h)* $\begin{cases} 2x+3y+z=0 \\ x+y+z=0 \end{cases}$ *i)* $\begin{cases} 2x_1+x_2+x_3+x_4=1 \\ 2x_1+x_2-x_3+x_4=3 \end{cases}$

j) $\begin{cases} 2x+2y+2z+3w=3 \\ x+y+z+w=1 \\ 3x+3y+3z+2w=2 \end{cases}$ *k)* $\begin{cases} x+z+2w=0 \\ 2x+3z+3w=0 \\ y+2w=2 \\ x+2z+w=0 \end{cases}$ *l)* $\begin{cases} y_1+y_3+2y_4=0 \\ y_1+2y_2+y_3+y_4=1 \\ y_2+2y_4=8 \\ y_1+2y_3+y_4=0 \end{cases}$

Exercício 2 *Determine o conjunto das soluções dos seguintes sistemas:*

$$a) \begin{cases} y+z=0 \\ 2x+3w=2 \\ 6x+3y+3z+4w=6 \\ 3x+2w=3 \\ 5x+y+z+5w=5 \end{cases} \quad b) \begin{cases} 3y-2z=0 \\ 2x+2y-2z=0 \\ x+4y-3z=0 \\ x-y+z=2 \end{cases}.$$

Exercício 3 *Discuta, em função dos parâmetros α e β, os seguintes sistemas de equações lineares:*

$$a) \begin{cases} x+4y+3z=10 \\ 2x+7y-2z=10 \\ x+5y+\alpha z=\beta \end{cases} \quad b) \begin{cases} 2x+y+z=-6\beta \\ \alpha x+3y+2z=2\beta \\ 2x+y+(\alpha+1)z=4 \end{cases}.$$

Exercício 4 *Considere o sistema de equações lineares nas incógnitas x, y e z*

$$\begin{cases} x + y + 3z = b_1 \\ 2x + 2y - z = b_2 \\ 4x + 4y + 5z = b_3 \end{cases},$$

e caracterize os vectores $(b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$ para os quais o sistema é possível.

Exercício 5 *Determine um sistema de equações lineares cujo conjunto de soluções seja:*

a) $S = \{(1+t, 1-t) : t \in \mathbb{R}\}$

b) $S = \{(3t, 2t, t) : t \in \mathbb{R}\}$

c) $S = \{(1-t, 2s, t) : s, t \in \mathbb{R}\}$

Exercício 6 *Determine um sistema de equações lineares cujo conjunto de soluções seja:*

a) $S = \{(3s - 2t + 1, s, 5t - 1, t) : s, t \in \mathbb{R}\}$

b) $S = \{(3t + 2s, t - s + 1, 2t - s + 2) : s, t \in \mathbb{R}\}$

Exercício 7 *Sempre que possível calcule:*

a) $2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}$ *b)* $\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ *c)* $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ *e)* $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ *f)* $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

g) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ *h)* $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ *i)* $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 30 & 4 \\ 2 & 10 \\ 2 & 20 \end{bmatrix}$

j) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 30 & 4 \\ 2 & 10 \\ 2 & 20 \end{bmatrix}$ *k)* $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 30 & 4 \\ 2 & 10 \\ 2 & 20 \end{bmatrix}$ *l)* $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 30 & 4 \\ 2 & 10 \\ 2 & 20 \end{bmatrix}$

Exercício 8 *Mostre que a inversa de uma matriz $A \in \mathcal{M}\mathrm{at}\,(n \times n)$, quando existe, é única.*

Exercício 9 *Mostre que se as matrizes A e $B \in \mathcal{M}\mathrm{at}\,(n \times n)$ são invertíveis, então também AB é invertível, tendo-se ainda $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.*

Exercício 10 *Considere as matrizes*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \end{bmatrix}.$$

Calcule a matriz $ABCD$ e a sua inversa $(ABCD)^{-1}$.

Exercício 11 *Sempre que possível, calcule a inversa de cada uma das seguintes matrizes:*

$$a) \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad b) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad c) \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad d) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$e) \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad f) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} \quad g) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad h) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Exercício 12 *Utilizando o exercício anterior, resolva os sistemas de equações lineares:*

$$a) \begin{cases} x - y = 0 \\ x + y - z = 1 \\ y + z = -1 \end{cases} \quad b) \begin{cases} x + z = 1 \\ y + w = 1 \\ x + 2z + w = -1 \\ x - y + z = 1 \end{cases}.$$

Soluções

1)

a) Sistema possível e determinado: $S = \{(3, -1)\}$; b) Sistema indeterminado com uma incógnita livre: $S = \left\{\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}y, y\right) : y \in \mathbb{R}\right\}$; c) Sistema impossível $S = \varnothing$; d) Sistema impossível: $S = \varnothing$; e) Sistema possível e determinado: $S = \{(-1, 0, 1)\}$; f) Sistema impossível: $S = \varnothing$; g) Sistema indeterminado com uma incógnita livre: $S = \{(5z, -3z, z) : z \in \mathbb{R}\}$; h) Sistema indeterminado com uma incógnita livre: $S = \{(-2z, z, z) : z \in \mathbb{R}\}$; i) Sistema indeterminado com duas incógnitas livres: $S = \left\{\left(1 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_4, x_2, -1, x_4\right) : x_2, x_4 \in \mathbb{R}\right\}$; j) Sistema indeterminado com duas incógnitas livres: $S = \{(-y - z, y, z, 1) : y, z \in \mathbb{R}\}$; k) Sistema indeterminado com uma incógnita livre: $S = \{(-3w, 2 - 2w, w, w) : w \in \mathbb{R}\}$; l) Sistema possível e determinado $S = \{(-9, 2, 3, 3)\}$.

2)

a) $\{(1, -z, z, 0) : z \in \mathbb{R}\}$; b) $\{(1, 2, 3)\}$.

3)

a) Se $\alpha \neq 11$ o sistema é possível e determinado; se $\alpha = 11$ e $\beta = 20$ o sistema é indeterminado; se $\alpha = 11$ e $\beta \neq 20$ o sistema é impossível. b) Se $\alpha \neq 0$ e $\alpha \neq 6$ o sistema é possível e determinado; se $\alpha = 0$ e $\beta = -2/3$ o sistema é indeterminado; se $\alpha = 0$ e $\beta \neq -2/3$ o sistema é impossível; se $\alpha = 6$ e $\beta = -2/63$ o sistema é indeterminado; se $\alpha = 6$ e $\beta \neq -2/63$ o sistema é impossível.

4) O sistema é possível se e só se $b_3 - 2b_1 - b_2 = 0$.

5)

a) $x_1 + x_2 = 2$; b) $\begin{cases} x_1 - 3x_3 = 0 \\ x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$; c) $x_1 + 0x_2 + x_3 = 1$.

6)

a) $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_4 = 1 \\ x_3 - 5x_4 = -1 \end{cases}$; b) $x_1 + 7x_2 - 5x_3 = -3$.

7)

a) $\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 22 & 5 \end{bmatrix}$; b) não é possível; c) não é possível; d) $[4]$; e) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$; f) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$;

g) $\begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \\ 6 & 3 & 0 \end{bmatrix}$; h) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 4 \end{bmatrix}$; i) $\begin{bmatrix} 30 & 4 \\ 2 & 10 \\ 2 & 20 \end{bmatrix}$; j) $\begin{bmatrix} 2 & 20 \\ 2 & 10 \\ 30 & 4 \end{bmatrix}$; k) $\begin{bmatrix} 30 & 4 \\ 2 & 10 \\ 6 & 60 \end{bmatrix}$;

l) $\begin{bmatrix} 30 & 4 \\ 2 & 10 \\ 62 & 28 \end{bmatrix}$.

10) $ABCD = \begin{bmatrix} 0 & -13 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \end{bmatrix}$; $(ABCD)^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} \\ \frac{-5}{2} & 0 & -\frac{13}{2} \end{bmatrix}$

11)

a) A matriz não é invertível; b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$; c) $\begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$; d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$;

e) $\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$.

f) A matriz não é invertível; g) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; h) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

12)

a) $\{(0, 0, -1)\}$; b) $\{(4, 0, -3, 1)\}$

2 Determinantes

Exercício 13 *Calcule o determinante de cada uma das seguintes matrizes e indique as que são invertíveis*

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ *b)* $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ *c)* $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ *e)* $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 5 & 0 \end{bmatrix}$ *f)* $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

g) $\begin{bmatrix} 1 & 12 & 22 & 31 \\ 0 & 3 & 11 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ *h)* $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ *i)* $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Exercício 14 *Sabendo que*

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 5,$$

calcule:

a) $\begin{vmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ a & b & c \end{vmatrix}$ *b)* $\begin{vmatrix} -a & -b & -c \\ 2d & 2e & 2f \\ -g & -h & -i \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} a+d & b+e & c+f \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$ *d)* $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d-3a & e-3b & f-3c \\ 2g & 2h & 2i \end{vmatrix}$

Exercício 15 *Sabendo que os valores reais γ e δ são tais que:*

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & \gamma \\ \delta & 1 & 1 \\ 1 & \gamma+\delta & 2 \end{vmatrix} = 1,$$

calcule

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & \gamma \\ \delta & \delta\gamma+\delta^2 & 2\delta \\ \delta\gamma & \gamma & \gamma \end{vmatrix}.$$

Exercício 16 *Considere as matrizes*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \ e\ B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Calcule: a) $\det(3A)$*; b)* $\det(A^3B^2)$*; c)* $\det(A^{-1}B^T)$*; d)* $\det(A^4B^{-2})$.

Exercício 17 *Mostre que*

$$\begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \lambda & \lambda+1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ \lambda & \lambda+1 & \lambda+2 & 3 & 3 & 3 \\ \lambda & \lambda+1 & \lambda+2 & \lambda+3 & 4 & 4 \\ \lambda & \lambda+1 & \lambda+2 & \lambda+3 & \lambda+4 & 5 \\ \lambda & \lambda+1 & \lambda+2 & \lambda+3 & \lambda+4 & \lambda+5 \end{vmatrix} = \lambda^6.$$

Exercício 18 *Calcule o determinante da matriz*

$$B = \begin{bmatrix} \lambda & \lambda & \lambda & \ldots & \lambda \\ 1 & \lambda+1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 1 & \lambda+1 & \ldots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \lambda+1 \end{bmatrix}.$$

Exercício 19 *Mostre que*

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 \end{vmatrix} = (\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_1).$$

Exercício 20 *Recorra à regra de Laplace para calcular o determinante das seguintes matrizes:*

$$a) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \quad b) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 6 & 0 \end{bmatrix} \quad c) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 5 & 6 & -3 \end{bmatrix}$$

$$d) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \quad e) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -5 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \quad f) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 6 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Exercício 21 *Calcular a matriz dos cofactores e a matriz inversa de cada uma das seguintes matrizes:*

$$a) \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \quad b) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \quad c) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Exercício 22 *Usar a regra de Cramer para resolver os sistemas de equações lineares:*

$$a)\ \begin{cases} y + 2z = 1 \\ 2x + 4y + z = 0 \\ x + 2y = 1 \end{cases} \quad b)\ \begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + z = 1 \\ x + 2y + 2z = -1 \end{cases}.$$

Soluções

13)

a) $\det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = -3$; b) $\det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = 0$; c) $\det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = 9$;

d) $\det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 1$; e) $\det \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 5 & 0 \end{bmatrix} = 30$; f) $\det \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 0$;

g) $\det \begin{bmatrix} 1 & 12 & 22 & 31 \\ 0 & 3 & 11 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 3$; h) $\det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} = 0$; i) $\det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 18$.

Apenas as matrizes das alíneas b), f) e h) não são invertíveis.

14)

a) 5; b) 10; c) 5; d) 10.

15) $-\delta\gamma$.

16)

a) -54. b) -128; c) -2; d) 1.

18) λ^n, onde n é o número de linhas (e de colunas da matriz).

20) a) -9; b) -5; c) -7; d) 6; e) 15; f) -45.

21)

a) $\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 1 \\ -7 & 4 & -2 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} -2 & 4 & -7 \\ 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$;

b) $\begin{bmatrix} -2 & -3 & 4 \\ -2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$;

c) $\begin{bmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix}$.

3 Espaços Lineares

Exercício 23 *Considere em* $\mathbb{R}^2$ *o conjunto* $S = \{(1,1), (2,2)\}$.

a) Mostre que o vector $(-5,-5)$ *é combinação linear dos vectores* S.

b) Mostre que o vector $(1,0)$ *não é combinação linear dos vectores* S.

c) O conjunto S *gera* $\mathbb{R}^2$*?*

d) Determine a forma geral dos vectores $(a,b) \in L(S)$.

Exercício 24 *Considere em* $\mathbb{R}^3$ *o conjunto* $S = \{(1,1,1), (0,1,1), (1,2,2)\}$.

a) Mostre que o vector $(2,3,3)$ *é combinação linear dos vectores* S.

b) Mostre que o vector $(0,0,1)$ *não é combinação linear dos vectores* S.

c) O conjunto S *gera* $\mathbb{R}^3$*?*

d) Determine a forma geral dos vectores $(a,b,c) \in L(S)$.

Exercício 25 *Decida quais dos seguintes conjuntos geram* $\mathbb{R}^3$*:*

a) $\{(1,3,3), (4,6,4), (-2,0,2), (3,3,1)\}$;

b) $\{(1,0,0), (1,1,0), (1,1,1)\}$;

c) $\{(1,4,2), (0,0,0), (-1,-3,-1), (0,1,1)\}$.

d) $\{(26,47,29), (123,0,498)\}$.

Exercício 26 *Decida quais dos seguintes conjuntos geram* $\mathbb{R}^4$*:*

a) $\{(1,1,0,0), (0,0,1,1), (1,0,0,1), (0,1,1,0), (0,1,1,-1)\}$;

b) $\{(1,1,1,1), (1,1,1,0), (1,1,0,0), (1,0,0,0)\}$;

c) $\{(1,1,1,1), (1,1,1,0), (1,1,0,0), (1,1,0,1)\}$;

d) $\{(11,-12,1,1), (45,17,1,20), (21,3,41,122)\}$.

Exercício 27 *Calcule o único valor de* a *que faz com que*

$$S = \{(1,1,1), (1,0,1), (0,2,0), (3,2,a)\}$$

não seja um conjunto gerador de $\mathbb{R}^3$.

Exercício 28 *Considere em* $\mathbb{R}^3$ *o conjunto* $S = \{(1,0,1), (0,1,a), (1,1,b), (1,1,1)\}$. *Calcule o único par* $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ *que faz com que* S *não gere* $\mathbb{R}^3$.

Exercício 29 *Considere em* $\mathbb{R}^4$ *o conjunto* $S = \{(1,0,1,0), (0,1,0,1), (1,1,0,0), (1,1,1,a)\}$. *Calcule o único valor de* a *que faz com que* S *não gere* $\mathbb{R}^4$.

Exercício 30 *Mostre que os seguintes conjuntos de vectores são linearmente dependentes:*

a) Em $\mathbb{R}^3$, $\overrightarrow{v}_1 = (1,1,2)$, $\overrightarrow{v}_2 = (2,2,4)$;

b) Em $\mathbb{R}^3$, $\overrightarrow{v}_1 = (1,1,1)$, $\overrightarrow{v}_2 = (3,3,3)$, $\overrightarrow{v}_3 = (0,1,1)$;

c) Em $\mathbb{R}^4$, $\overrightarrow{v}_1 = (0,1,0,1)$, $\overrightarrow{v}_2 = (1,0,1,0)$, $\overrightarrow{v}_3 = (2,3,2,3)$;

d) Em $\mathbb{R}^4$, $\overrightarrow{v}_1 = (0,1,0,1)$, $\overrightarrow{v}_2 = (1,0,1,0)$, $\overrightarrow{v}_3 = (2,0,1,3)$, $\overrightarrow{v}_4 = (0,0,0,0)$.

Exercício 31 *Decida quais dos seguintes conjuntos de vectores são linearmente independentes:*

a) Em $\mathbb{R}^4$, $\overrightarrow{v}_1 = (1,1,0,0)$, $\overrightarrow{v}_2 = (1,0,1,0)$, $\overrightarrow{v}_3 = (0,0,1,1)$, $\overrightarrow{v}_4 = (0,1,0,1)$.

b) Em $\mathbb{R}^3$, $\overrightarrow{v}_1 = (1,1,2)$, $\overrightarrow{v}_2 = (1,2,1)$, $\overrightarrow{v}_3 = (3,1,1)$.

Exercício 32 *Decida quais dos seguintes conjuntos são linearmente independentes:*

a) Em $\mathbb{R}^3$, $\{(1,1,1),(1,2,1)\}$;

b) Em $\mathbb{R}^3$, $\{(1,1,1),(0,1,1),(0,0,1)\}$;

c) Em $\mathbb{R}^3$, $\{(1,1,1),(2,2,0),(0,0,1)\}$;

d) Em $\mathbb{R}^3$, $\{(2,46,6),(23,2,-123),(1,23,1),(1,10,1)\}$;

e) Em $\mathbb{R}^4$, $\{(1,0,-1,0),(4,0,-3,1),(2,0,-1,1)\}$;

f) Em $\mathbb{R}^4$, $\{(1,0,-1,0),(4,0,-3,1),(2,1,-1,1)\}$;

g) Em $\mathbb{R}^4$, $\{(1,1,1,1),(1,1,1,0),(1,1,0,0),(1,0,0,0)\}$;

h) Em $\mathbb{R}^4$, $\{(1,23,1,14),(1,12,1,0),(24,-1,0,0),(11,19,17,-123),(101,119,1,1)\}$.

Exercício 33 *Calcule o único valor de* a *que faz com que os vectores de* $\mathbb{R}^4$

$$\overrightarrow{v}_1 = (1,0,0,2), \overrightarrow{v}_2 = (1,0,1,0), \overrightarrow{v}_3 = (2,0,1,a)$$

sejam linearmente dependentes.

Exercício 34 *Considere em* $\mathcal{P}_2$ *(espaço dos polinómios com grau* $\leqslant 2$*) o conjunto* $S = \{1+t, 1-t^2\}$.

a) Mostre que o vector $t+t^2$ *é combinação linear dos vectores de* S.

b) Mostre que o vector t *não é combinação linear dos vectores de* S.

c) O conjunto S *gera* $\mathcal{P}_2$*?*

d) Determine a forma geral dos vectores $p(t) \in L(S)$.

Exercício 35 *Mostre que os polinómios*

$$p_1(t) = 1+2t-t^2,\ p_2(t) = 3+t^2,\ p_3(t) = 5+4t-t^2,\ p_4(t) = -2+2t-t^2$$

geram $\mathcal{P}_2$.

Exercício 36 *Considere espaço vectorial das funções reais de variável real. Mostre que cada um dos seguintes conjuntos é linearmente dependente.*

$$\text{a) } \left\{2, \sin^2(t), \cos^2(t)\right\} \quad \text{b) } \left\{\cos(2t), \sin^2(t), \cos^2(t)\right\}$$
$$\text{c) } \left\{e^t, e^{-t}, \cosh(t)\right\} \quad \text{d) } \left\{1, t, t^2, (t+1)^2\right\}.$$

Exercício 37 *No espaço vectorial das funções reais de variável real considere* n *vectores* $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,..., $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. *Mostre que se existirem números* t_1, t_2,..., $t_n \in \mathbb{R}$ *tais que*

$$\det\left(\begin{bmatrix} f_1(t_1) & f_2(t_1) & \dots & f_n(t_1) \\ f_1(t_2) & f_2(t_2) & \dots & f_n(t_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_1(t_n) & f_2(t_n) & \dots & f_n(t_n) \end{bmatrix}\right) \neq 0,$$

então os vectores f_1, f_2,..., f_n *são linearmente independentes.*

Exercício 38 *Mostre, recorrendo ao exercício anterior, que os conjuntos de vectores*

$$\left\{1, t, e^t\right\} \text{ e } \{\sin(t), \cos(t), t\cos(t)\}$$

são linearmente independentes. Sugestão: no primeiro caso faça $t_1 = 0$, $t_2 = 1$, $t_3 = -1$, *no segundo faça* $t_1 = 0$, $t_2 = \pi/2$, $t_3 = \pi$.

Soluções

24)

c) S não gera $\mathbb{R}^3$; d) $L(S) = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : c - b = 0\} = \{(a,c,c) : a, c \in \mathbb{R}\}$.

25)

a) S não gera $\mathbb{R}^3$; b) S gera $\mathbb{R}^3$; c) S não gera $\mathbb{R}^3$; d) S não gera $\mathbb{R}^3$.

26)

a) S gera $\mathbb{R}^4$; b) S gera $\mathbb{R}^4$; c) S não gera $\mathbb{R}^4$; d) S não gera $\mathbb{R}^4$.

27) $a = 3$.

28) $(a,b) = (0,1)$.

29) $a = 1$.

31)

a) Linearmente dependentes; b) Linearmente independentes

32)

a) Linearmente independentes; b) Linearmente independentes; c) Linearmente dependentes; d) Linearmente dependentes; e) Linearmente dependentes; f) Linearmente independentes; g) Linearmente independentes; h) Linearmente dependentes.

33) $a = 2$.

34)

c) S não gera $\mathcal{P}_2$; d) $L(S) = \{b - c + bt + ct^2 : b, c \in \mathbb{R}^2\}$.

4 Bases e Dimensão

Exercício 39 *Mostre que qualquer base de* $\mathbb{R}^m$ *tem* m *vectores.*

Exercício 40 *Determine quais dos seguintes conjuntos são bases de* $\mathbb{R}^2$*:*

a) $\{(1,0),(0,1)\}$*;*

b) $\{(1,1),(0,3)\}$*;*

c) $\{(1,0),(0,3),(2,5)\}$*;*

d) $\{(1,2)\}$*;*

e) $\{(1,1),(0,0)\}$.

Exercício 41 *Determine quais dos seguintes conjuntos são bases de* $\mathbb{R}^3$*:*

a) $\{(1,1,1),(1,0,1),(1,1,0)\}$*;*

b) $\{(1,1,1),(1,0,1),(1,2,1)\}$*;*

c) $\{(3,0,0),(1,1,0),(2,2,2),(1,3,5)\}$

d) $\{(1,1,1),(2,2,0)\}$.

Exercício 42 *Determine quais dos seguintes conjuntos são bases de* $\mathbb{R}^4$*:*

a) $\{(1,0,1,0),(1,1,0,0),(0,0,1,0),(2,1,-1,0)\}$*;*

b) $\{(1,3,0,0),(1,1,3,1),(2,2,3,2),(2,3,3,2),(2,4,1,2)\}$*;*

c) $\{(2,0,0,2),(1,1,0,0),(0,0,2,3),(1,2,1,2)\}$*;*

d) $\{(2,0,0,2),(1,1,0,0),(1,2,1,2)\}$.

Exercício 43 *Seja* $\mathcal{B}=\{\overrightarrow{v}_1,\overrightarrow{v}_2\}$ *a base de* $\mathbb{R}^2$ *constituída pelos vectores*

$$\overrightarrow{v}_1=(1,0) \text{ e } \overrightarrow{v}_2=(1,1).$$

a) Qual é o vector de $\mathbb{R}^2$ *que nesta base tem componentes* $(2,2)$*?*

b) Calcule as componentes do vector $(3,5)$ *nesta base.*

c) Mediante uma matriz de mudança de base apropriada, calcule as componentes de um vector $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ *nesta base.*

Exercício 44 *Seja* $\mathcal{B}=\{\overrightarrow{v}_1,\overrightarrow{v}_2,\overrightarrow{v}_3\}$ *a base de* $\mathbb{R}^3$ *constituída pelos vectores*

$$\overrightarrow{v}_1=(2,0,0), \overrightarrow{v}_2=(1,1,0) \text{ e } \overrightarrow{v}_3=(1,1,1).$$

a) Qual é o vector de $\mathbb{R}^3$ *que nesta base tem componentes* $(0,3,5)$*?*

b) Calcule as componentes do vector $(2,0,1)$ *nesta base.*

c) Mediante uma matriz de mudança de base apropriada, calcule as componentes de um vector $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ *nesta base.*

Exercício 45 *Seja $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \overrightarrow{v}_3\}$ o subconjunto de $\mathcal{P}_2$ constituído pelos polinómios*

$$\overrightarrow{v}_1 = 1 + t,\ \overrightarrow{v}_2 = 1 + 2t \text{ e } \overrightarrow{v}_3 = t^2 .$$

a) Mostre que $\mathcal{B}$ é uma base de $\mathcal{P}_2$.

b) Qual é o polinómio que nesta base tem componentes $(1, 3, -2)$?

c) Calcule as componentes do vector $2 + 2t - t^2$ nesta base.

d) Mediante uma matriz de mudança de base apropriada, calcule as componentes de um polinómio $a + bt + ct^2$ nesta base.

Exercício 46 *Represente graficamente cada um dos seguintes subconjuntos do plano, identificando os que são subespaços lineares de $\mathbb{R}^2$:*

a) $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\}$;

b) $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 0\}$;

c) $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 0 \text{ e } x - y = 0\}$;

d) $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 1\}$;

e) $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$.

Exercício 47 *Represente graficamente cada um dos seguintes subconjuntos do espaço, identificando os que são subespaços lineares de $\mathbb{R}^3$:*

a) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$;

b) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 1\}$

c) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y = 0 \text{ e } x - y + 2z = 0\}$;

d) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y = 1 \text{ e } x - y + 2z = 0\}$;

e) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$;

f) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$.

Exercício 48 *Para cada uma das seguintes matrizes, calcule bases para o espaço das colunas e para o espaço nulo. Calcule ainda a característica e a nulidade de cada uma das matrizes:*

$$a)\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad b)\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad c)\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$d)\ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad e)\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad f)\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$g)\begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 & 3 \\ 3 & 6 & 0 & 3 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad h)\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad i)\ \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} .$$

Exercício 49 *Calcule uma base e a dimensão de cada um dos seguintes subespaços lineares:*

a) $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 0\}$;

b) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + 2z = 0 \}$;

c) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0 \text{ e } x + y + 2z = 0 \}$;

d) $S = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x + y + z + w = 0 \text{ e } x + y + 2z = 0 \}$;

e) $S = L\{(1, 1), (2, 1), (1, 2)\}$;

f) $S = L\{(1, -1, 1), (1, 1, 3), (0, 1, 1)\}$;

g) $S = L\{(1, 4, -2, 3), (3, 6, 0, 3), (3, 4, 2, 1)\}$.

Exercício 50 *Mostre que se U e V são subespaços de um espaço linear E, então também a intersecção $U \cap V$ é um subespaço de E e dê exemplos de subespaços que U e V tais que*

*a) A união $U \cup V$ **é** um subespaço de E.*

*b) A união $U \cup V$ **não é** um subespaço de E.*

Exercício 51 *Sejam U e V subespaços de um espaço linear E e considere-se o subconjunto soma*

$$U + V \overset{def}{=} \{\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} : \overrightarrow{u} \in U \text{ e } \overrightarrow{v} \in V\}.$$

Mostre que:

a) O conjunto $U \cup V$ está contido no conjunto $U + V$.

b) A soma $U + V$ é um subespaço linear.

c) Se W for um subespaço linear que contém $U \cup V$, então W também contém $U + V$.

d) A soma $U + V$ é o menor subespaço de E que contém $U \cup V$.

Exercício 52 *Calcule uma base e a dimensão de cada um dos seguintes subespaços de $\mathbb{R}^3$:*

a) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0 \} \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - 3z = 0 \}$;

b) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0 \} \cap L\{(1, 1, 1), (0, 1, 1)\}$;

c) $S = L\{(1, 0, 0), (0, 0, 1)\} \cap L\{(1, 1, 1), (0, 1, 1)\}$;

d) $S = L\{(1, 0, 0), (0, 0, 1)\} + L\{(1, 1, 1), (0, 1, 1)\}$;

e) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0 \} + L\{(1, 1, 1), (0, 1, 1)\}$;

f) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0 \} + \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - 3z = 0 \}$.

Exercício 53 *Considere o espaço linear $\mathcal{P}_3$ (polinómios com grau menor ou igual a 3)*

a) Mostre que o conjunto $\{p(t) \in \mathcal{P}_3 : p(0) = 0\}$ é um subespaço linear de $\mathcal{P}_3$. Calcule uma base para este subespaço.

b) Mostre que o conjunto $\{p(t) \in \mathcal{P}_3 : p(1) = 0\}$ é um subespaço linear de $\mathcal{P}_3$. Calcule uma base para este subespaço.

c) Mostre que o conjunto $\{p(t) \in \mathcal{P}_3 : p(1) = p(0)\}$ é um subespaço linear de $\mathcal{P}_3$. Calcule uma base para este subespaço.

Exercício 54 *Considere os espaços lineares* $\mathcal{M}\mathrm{at}\,(m \times n)$ *(espaço das matrizes* $m \times n$*)*

a) Mostre que o conjunto $\left\{\mathbf{A} \in \mathcal{M}\mathrm{at}\,(2 \times 3) : \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{A} = \mathbf{0}\right\}$ *é um subespaço linear de* $\mathcal{M}\mathrm{at}\,(2 \times 3)$*. Calcule uma base para este subespaço.*

b) Mostre que o conjunto $\left\{\mathbf{A} \in \mathcal{M}\mathrm{at}\,(2 \times 2) : \mathbf{A} = \mathbf{A}^T\right\}$ *é um subespaço linear de* $\mathcal{M}\mathrm{at}\,(2 \times 2)$*. Calcule uma base para este subespaço.*

c) Mostre que o conjunto $\{[a_{ij}] \in \mathcal{M}\mathrm{at}\,(3 \times 3) : a_{ij} = 0 \text{ se } i + j \text{ é par}\}$ *é um subespaço linear de* $\mathcal{M}\mathrm{at}\,(3 \times 3)$*. Calcule uma base para este subespaço.*

Exercício 55 *No espaço linear* V *das funções reais de de variável real duas vezes diferenciáveis, considere o subconjunto*

$$S = \{f \in V : f'' - 2f' + f = 0\}.$$

a) Mostre que S *é um subespaço linear de* V*.*

b) Mostre que o conjunto $\{e^t, te^t\}$ *é uma base de* S*. Sugestão: mostre que se* $f \in S$*, então* $f(t)e^{-t}$ *é um polinómio com grau* ≤ 1*.*

c) Mostre que, dados a *e* $b \in \mathbb{R}$*, existe uma e uma só função* $f \in S$ *tal que* $f(0) = a$ *e* $f'(0) = b$*. Sugestão: tenha em conta que o conjunto* $\{e^t, te^t\}$ *é uma base de* S*.*

Soluções

41)

a) É base de $\mathbb{R}^3$; b) Não é base de $\mathbb{R}^3$; c) Não é base de $\mathbb{R}^3$; d) Não é base de $\mathbb{R}^3$.

42)

a) Não é base de $\mathbb{R}^4$; b) Não é base de $\mathbb{R}^4$; c) É base de $\mathbb{R}^4$; d) Não é base de $\mathbb{R}^4$.

43)

a) $(4, 2)$; b) $(-2, 5)$; c) $(a - b, b)$.

44)

a) $(8, 8, 5)$; b) $(1, -1, 1)$; c) $\left(\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b, b - c, c\right)$.

45)

b) $4 + 7t - 2t^2$; c) $(2, 0, -1)$; d) $(2a - b, b - a, c)$.

46)

a) É subespaço de $\mathbb{R}^2$; b) É subespaço de $\mathbb{R}^2$; c) É subespaço de $\mathbb{R}^2$; d) Não é subespaço de $\mathbb{R}^2$; e) Não é subespaço de $\mathbb{R}^2$.

47)

a) É subespaço de $\mathbb{R}^3$; b) Não é subespaço de $\mathbb{R}^3$; c) É subespaço de $\mathbb{R}^3$; d) Não é subespaço de $\mathbb{R}^3$; e) Não é subespaço de $\mathbb{R}^3$; f) Não é subespaço de $\mathbb{R}^3$.

49)

a) $\{(-1, 1)\}$ é base de S, logo $\dim(S) = 1$; b) $\{(-1, 1, 0), (-2, 0, 1)\}$ é base de S, logo $\dim(S) = 2$; c) $\{(-1, 1, 0)\}$ é uma base de S, logo $\dim(S) = 1$; d)

$\{(-1,1,0,0),(-1,-1,1,1)\}$ é base de S, logo $\dim(S)=2$. e) $\{(1,1),(1,2)\}$ é base de S e $\dim(S)=2$; f) $\{(1,-1,1),(1,1,3)\}$ é base de S, logo $\dim(S)=2$; g) $\{(1,4,-2,3),(3,6,0,3)\}$ é base de S, logo $\dim(S)=2$;

52)

a) $\{(-1,1,0)\}$ é base de S, logo $\dim(S)=1$; b) $\{(-2,1,1)\}$ é base de S, logo $\dim(S)=1$; d) $\{(1,0,0),(0,0,1),(1,1,1)\}$ é base de S, logo $\dim(S)=3$.

53)

a) $\{t,t^2,t^3\}$ é uma base de S; b) $\{t-1,t^2-1,t^3-1\}$ é uma base de S; c) $\{1,t^2-t,t^3-t\}$ é uma base de S.

54)

a) Uma base do subespaço é $\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}\right\}$

b) Uma base do subespaço é $\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right\}$

c) Uma base do subespaço é $\left\{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right\}$