Instituto Superior Técnico 2003/2004 – 1º semestre

Álgebra Linear 1º ano da Licenciatura em Engenharia Informática

Exame Final (1ª época) 12/1/2004 .

1. **i)** Faz-se a eliminação de Gauss sobre a matriz aumentada do sistema $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 3\alpha & 6\beta \end{array}\right]$

o resultado é $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 3\alpha-3 & 6\beta-6 \end{array}\right]$. Para o sistema ser indeterminado, $\alpha = 1$ e $\beta = 1$.

ii) A aplicação é sobrejectiva e $v \in \operatorname{Im}(T)$ quando a característica da matriz A_α é 3, logo quando $\alpha \neq 1$.

iii) Basta resolver $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, ou seja $\ker(T) = \mathcal{L}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$.

2. **i)** A base canónica é $\{e_1, e_2\} = \{1, t\}$, assim $F(1) = 3 = 3e_1 + 0e_2$ que nos dá a primeira coluna de A, $F(t) = 1 + 3t = 1e_1 + 3e_2$ que nos dá a segunda coluna de A, o que implica que $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$.

ii) A matriz de passagem é $S = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, a sua inversa é $S^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$, logo $B = S^{-1}AS$ será $B = \begin{bmatrix} \frac{7}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \end{bmatrix}$.

iii) Consiste em resolver $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, de onde resulta $p(t) = \frac{4}{9} - \frac{1}{3}t$.

3. **i)** O polinómio característico é $\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - bc = \lambda^2 - (trA)\lambda + \det A$.

Resolver a equação característica utilizando a fórmula resolvente das equações do segundo grau dá como resultado $\frac{trA \pm \sqrt{(trA)^2 - 4\det}}{2}$.

ii) Os valores próprios de $\begin{bmatrix} -3 & b \\ b & -3 \end{bmatrix}$ têm de ser ambos negativos, como o traço da matriz é -6 e como o determinante é $9 - b^2$, os valores próprios são $\frac{-6 \pm \sqrt{36 - 4(9-b^2)}}{2} = -3 \pm b$ de onde se conclui que $-3 < b < 3$.

iii) Para $\lambda = -3 - b$ temos a $\begin{bmatrix} b & b \\ b & b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, de onde resulta o vector próprio $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Para $\lambda = -3 + b$ temos a $\begin{bmatrix} -b & b \\ b & -b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, de onde resulta o vector próprio $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

iv) Basta normalizar cada um dos vectores próprios, já ortogonais entre si, a norma de cada um destes vectores próprios é $\sqrt{2}$, a matriz ortogonal será $P = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$.