Instituto Superior Técnico 20021/2003 – 1º semestre

Álgebra Linear 1º ano Licenciaturas em Engenharias Civil, do Território e Naval

Resolução do Exame Final (2ª época) 25/01/2003

(Esta resolução refere-se apenas a um dos enunciados propostos, todos eles similares)

1.

i) $A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

ii) Como $p_A(\mathrm{x}) = \mathrm{x}^2 + r\mathrm{x} + s = \mathrm{x}^2 - \mathrm{tr}(A)\mathrm{x} + \det(A)$ vem $\Delta = \mathrm{tr}(A)^2 - 4\det(A) = (a+d)^2 - 4(ad-b^2) = (a-d)^2 + 4b^2$.

iii) Há que determinar $M_3 = \begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix}$ tal que $\langle M_1, M_3 \rangle = 0$ e $\langle M_2, M_3 \rangle = 0$.

Ora: $\langle M_1, M_3 \rangle = \mathrm{tr}(M_1 M_3) = \frac{a}{2} - b + \frac{d}{2}$ e $\langle M_2, M_3 \rangle = \mathrm{tr}(M_2 M_3) = a + 2b + d$ ou seja que tem de ser $\begin{cases} \frac{a}{2} - b + \frac{d}{2} = 0 \\ a + 2b + d = 0 \end{cases}$ e portanto $\begin{cases} b = 0 \\ d = -a \end{cases}$ pelo que M_3 terá de ser da forma $M_3 = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{bmatrix}$ com $a \in \mathbb{R}$.

iv) Partindo da base ortogonal $\mathcal{B} = \{M_1, M_2, M_3\}$ basta calcular as normas de M_1, M_2, M_3; ora:
$\|M_1\|^2 = 1$, $\|M_2\|^2 = 4$, $\|M_3\|^2 = 2$, pelo que

$$N_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad N_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad N_3 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} .$$

v) $\delta = \|I - J\| = \left\| \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \right\| = \|N_1\| = 1$.

Vire a página para ver o resto da resolução do seu exame.

2.

Tem-se

$$D_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix};$$

i) $\varphi(D_1) = AD_1 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{bmatrix} = aD_1 + cD_4 = aD_1 + 0D_2 + 0D_3 + cD_4$

$\varphi(D_2) = AD_2 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{bmatrix} = bD_3 + dD_2 = 0D_1 + dD_2 + bD_3 + 0D_4$

$\varphi(D_3) = AD_3 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & c \end{bmatrix} = aD_3 + cD_2 = 0D_1 + cD_2 + aD_3 + 0D_4$

$\varphi(D_4) = AD_4 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b & 0 \\ d & 0 \end{bmatrix} = bD_1 + dD_4 = bD_1 + 0D_2 + 0D_3 + dD_4$

pelo que

$$M = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & d & c & 0 \\ 0 & b & a & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{bmatrix}$$

ii) A resposta é:

$U_2 = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ \beta & 0 \end{bmatrix}$ e $U_5 = \begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & \beta \end{bmatrix}$.

iii) Se $Av = \lambda v$, com $v = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$ é claro que $\varphi(V) = AV = \lambda V$, com $V = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ \beta & 0 \end{bmatrix}$ e reciprocamente se $\varphi(V) = AV = \lambda V$ com $V = \begin{bmatrix} \alpha & \alpha' \\ \beta & \beta' \end{bmatrix}$, tem-se se em particular $Av = \lambda v$ e $Av' = \lambda v'$ com $v = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$ e $v' = \begin{bmatrix} \alpha' \\ \beta' \end{bmatrix}$, pelo que os valores próprios de A e de φ são os mesmos, ou seja: $P = \{\lambda_1, \lambda_2\}$.

iv) Pelo que se acabou de ver a resposta é:

$V_1 = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ b_1 & 0 \end{bmatrix}$, $V_2 = \begin{bmatrix} 0 & a_1 \\ 0 & b_1 \end{bmatrix}$, $V_2 = \begin{bmatrix} a_2 & 0 \\ b_2 & 0 \end{bmatrix}$, $V_2 = \begin{bmatrix} 0 & a_2 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix}$

v) Pelo que acabou de ver-se φ será diagonalizável se e só se A o for.

Vire a página para ver o resto da resolução do seu exame.