Instituto Superior Técnico 20021/2003 – 1º semestre

Álgebra Linear 1º ano Licenciaturas em Engenharias Civil, do Território e Naval

Resolução do Exame Final (1ª época) 10/01/2003

(Esta resolução refere-se apenas a um dos enunciados propostos, todos eles similares)

1.

i)

A condição $2\,p(\mathrm{x}) = \mathrm{x}\,p'(\mathrm{x})$ aplicada a $p(\mathrm{x}) = a + b\mathrm{x} + c\mathrm{x}^2$ significa que $a = b = 0$, ou seja que se $p(\mathrm{x}) \in \mathcal{L}$ é porque $p(\mathrm{x})$ é da forma $p(\mathrm{x}) = c\mathrm{x}^2$; o conjunto $\left\{\mathrm{x}^2\right\}$ é pois o único dos conjuntos propostos que é uma base de $\mathcal{L}$.

ii) Identificando os elementos de $\mathcal{B}$ e de $\mathcal{B}'$, na ordem dada, com colunas de matrizes teremos:

$$\mathcal{B}|\mathcal{B}' = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

e daqui sai imediatamente, a matriz de passagem $N = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ cuja inversa é a matriz $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

iii) Dado $p(\mathrm{x}) = a + b\mathrm{x} + c\mathrm{x}^2$ dizer que $p(\mathrm{x}) \in \ker T$ significa que $2\,p(\mathrm{x}) = \mathrm{x}\,p'(\mathrm{x})$, ou seja que $p(\mathrm{x})$ é da forma $p(\mathrm{x}) = c\mathrm{x}^2$ e portanto $m = \dim_{\mathbb{R}}(\ker T) = 1$; como $\dim_{\mathbb{R}}(\ker T) + \dim_{\mathbb{R}}(\operatorname{im} T) = 3$ resulta que $n = \dim_{\mathbb{R}}(\operatorname{im} T) = 2$.

iv) Como $T(1) = 2$, $T(\mathrm{x}) = \mathrm{x}$, $T(\mathrm{x}^2) = 0$, tem-se
$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

v) A distância pedida é $d(p(\mathrm{x}), q(\mathrm{x})) = d(1, \mathrm{x}) = \|1 - \mathrm{x}\| = \langle 1 - \mathrm{x}, 1 - \mathrm{x}\rangle^{1\backslash 2} = (1 + 2)^{1\backslash 2} = 3^{1\backslash 2} = \sqrt{3}$.

2.

i) Como os valores próprios de A são as raízes de $|A - \lambda I| = 0$ e $|A - \lambda I| = \lambda^2 - 4$ os valores próprios são $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = -2$; temos então $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$.

ii) A matriz P pedida obtém-se a partir de uma base própria de $\mathbb{R}^2$, relativamente a A, e como os espaços póprios de $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = -2$ são respectivamente $E(2) = \ll (1,1) \gg$ e $E(-2) = \ll (1,-3) \gg$, pelo que $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$.

iii) As funções $y_1(t)$ e $y_2(t)$ satisfazendo $y'(t) = D\,.\,y(t)$ ou seja satisfazendo a

$$\begin{cases} y_1'(t) = 2y_1(t) \\ y_2'(t) = -2y_2(t) \end{cases}$$

são

$$\begin{cases} y_1(t) = c_1 \exp(2t) \\ y_2(t) = c_2 \exp(-2t) \end{cases}$$

sendo c_1, c_2 números reais.

iv) Pondo $x(t) = P\,.\,y(t)$ e sabendo que $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$ e $y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \exp(2t) \\ c_2 \exp(-2t) \end{bmatrix}$ vem:

$$\begin{aligned} x(t) &= \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \exp(2t) \\ c_2 \exp(-2t) \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} c_1 \exp(2t) + c_2 \exp(-2t) \\ c_1 \exp(2t) - 3c_2 \exp(-2t) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

v) Sabe-se $\begin{cases} x_1(0) = c_1 + c_2 = 1 \\ x_2(1) = c_1 \exp(2) - 3c_2 \exp(-2) = 0 \end{cases}$ pelo que resolvendo o sistema

$$\begin{cases} c_1 + c_2 & = 1 \\ c_1 e^2 - 3c_2 e^{-2} & = 0 \end{cases}$$

se obtém $c_1 = 3\frac{e^{-2}}{e^2+3e^{-2}}$, $c_2 = \frac{e^2}{e^2+3e^{-2}}$.