Instituto Superior Técnico 2001/2002 – 1º semestre

Álgebra Linear 1º ano das Licenciaturas em Engenharia Civil e do Território

Resolução do Exame Final (1ª época) 28/1/2002

(Esta resolução refere-se apenas a um dos enunciados propostos, todos eles similares)

1.

i) Identificando $\mathcal{P}$ com $\mathbb{R}^3$ basta calcular o determinante $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & \alpha \end{vmatrix} = \alpha + 1$ para concluir que haverá dependência linear se e só $\alpha = -1$.

ii) $T(c_0 + c_1 t + c_2 t^2) = c_1 + 2c_2 t$ e como $T(1) = 0, T(t) = 1, T(t^2) = 2t$ há que saber para que valores de β o sistema $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \beta \end{bmatrix}$ tem solução e tal sucede se e só se $\beta = 0$. (Note-se que como o grau dos elementos de $\mathrm{im}\,(T)$ é ≤ 1 o é óbvio que o polinómio $1 + \beta t^2$ estará em $\mathrm{im}\,(T)$ se e só se $\beta = 0$).

iii)

$$\begin{array}{r} T(1) = 0 = \mathbf{0}.1 + \mathbf{0}.(1-t) + \mathbf{0}.(1+t^2), \\ T(1-t) = -1 = -\mathbf{1}.1 + \mathbf{0}.(1-t) + \mathbf{0}.(1+t^2), \\ T(1+t^2) = 2t = \mathbf{2}.1 + (-\mathbf{2}).(1-t) + \mathbf{0}.(1+t^2) \end{array} \qquad \text{pelo que} \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2.

i) Como $\det(B) = \begin{vmatrix} 1 & \beta \\ \beta^{-1} & \beta^2 \end{vmatrix} = \beta^2 - 1$ tem-se: $\dim(\ker(T)) = \begin{cases} 0 \text{ se } \beta \neq 1 \text{ e } \beta \neq -1 \\ 1 \text{ se } \beta = 1 \text{ ou } \beta = -1 \end{cases}$ e como $2 = \dim(\ker(T)) + \dim(\mathrm{im}\,(T))$ vem $\dim(\mathrm{im}\,(T)) = \begin{cases} 2 \text{ se } \beta \neq 1 \text{ e } \beta \neq -1 \\ 1 \text{ se } \beta = 1 \text{ ou } \beta = -1 \end{cases}$ e portanto só $\beta = 1$ ou $\beta = -1$ se terá $\dim(\ker(T)) = \dim(\mathrm{im}\,(T))$.

ii) Como $\det(B) = \begin{vmatrix} 1 & -\gamma \\ \gamma^{-1} & \gamma^2 \end{vmatrix} = \gamma^2 + 1$ a matriz C é invertível se e só se $\gamma = \mathrm{i}$ ou $\gamma = -\mathrm{i}$.

iii) Basta comparar os seus determinantes e os seus traços pois trata-se de matrizes 2×2. Temos assim para cada um dos casos:

	det	tr
a)	0	0
b)	2	2
c)	**0**	**2**
d)	**0**	**2**
e)	−1	0
f)	2	0

pelo que as matrizes das alíneas c) e d) são semelhantes.

3.

i) Como os valores próprios de A são 1 e 3, de que são vectores próprios respectivamente $(-1, 1)$ e $(1, 1)$ (necessariamente e ortogonais para o produto interno canónico, pois os valores próprios são distintos e A é simétrica) basta normalizar esses vectores obtendo-se: $\frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1)$ e $\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)$ pelo que $P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

ii) Como $\begin{bmatrix} 0 & \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \end{bmatrix} = \alpha\beta$. os vectores serão ortogonais se e só se $\alpha = 0$ ou $\beta = 0$.

iii) Basta considerar a base $\{u_1, u_2\}$ dada por $u_1 = v_1$ e $u_2 = v_2 - \mathrm{pr}_{v_1} v_2 = v_2 - \frac{p(v_1, v_2)}{p(v_1, v_1)} v_1$. Ora $p(v_1, v_1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 2$ e $p(v_1, v_2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 1$, pelo que $u_2 = (0, 1) - \frac{1}{2}(1, 0) = (-\frac{1}{2}, 1)$. A base formada por $u_1 = (1, 0)$ e $u_2 = (-\frac{1}{2}, 1)$ é pois ortogonal com relação ao produto interno $p(u, v)$.

4. Como $p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ b & d - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad - b^2)$ e o discriminante deste binómio é $\Delta = (a+d)^2 - 4(ad - b^2) = (a-d)^2 + 4b^2 \geq 0$ a condição necessária e suficiente pedida é que $a \neq d$ ou $b \neq 0$, tendo-se então $\Delta > 0$.