Instituto Superior Técnico 2001/2002 – 1º semestre

Álgebra Linear 1º ano das Licenciaturas em Engenharia Civil e do Território

Resolução do Exame Final (1ª época) 14/1/2002

(Esta resolução refere-se apenas a um dos enunciados propostos, todos eles similares)

1.

i) $X = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{bmatrix} \in \mathcal{V}$ se e só $A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $A \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ e portanto $X = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -2\alpha & -2\beta \end{bmatrix}$ pelo que $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{L} = 2$.

ii) As matrizes $X_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$, $X_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ formam uma base de $\mathcal{L}$ e como $B = (-2)X_1 + (-1)X_2$ as coordenadas de B são $(-2, -1)$.

iii) $T(1,-2) = (0,0) = 0\,(1,-2) + 0\,(-2,1)$ e $T(-2,1) = (-6,3) = 3\,(-2,1) = 0\,(1,-2) + 3\,(-2,1)$ pelo que $C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$.

2.

i) $L = \{x \in \mathbb{R}^3 : \quad (M_2 - 3I)x = 0\}$ e como $M_2 - 3I = \begin{bmatrix} -5 & 2 & 1 \\ 5 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ vem, condensando:

$\begin{bmatrix} -5 & 2 & 1 \\ 5 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} -5 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} -5 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ou seja $M_2 - 3I$ tem rango 2 e portanto $\dim_{\mathbb{R}} L = 3 - 2 = 1$.

ii) Como a solução geral de $(M_2 - 3I)x = 0$ é $(2\alpha, 5\alpha, 0)$ com $\alpha \in \mathbb{R}$, tem-se $L = \ll (2,5,0) \gg$.

$\mathrm{pr}_L v = \frac{\langle (0,0,1),(2,5,0) \rangle}{\|(0,0,1)\|.\|(2,5,0)\|}(2,5,0) = (0,0,0)$ e portanto $\mathrm{ort}_L v = v - \mathrm{pr}_L v = v$ e daí $\|\mathrm{ort}_L v\| = \|v\| = 1$.

iii) O polinómio característico de M_2 é $p(\lambda) = -(\lambda - 3)^2(\lambda + 4)$ e viu-se que a multiplicidade geométrica $\mu_g(3)$ do valor próprio 3 é igual a 1 enquanto que a algébrica é $\mu_a(3) = 2$, pelo que a diagonalização não é possível (nem relativamente a $\mathbb{R}$ nem relativamente a $\mathbb{C}$).

iv) M_2 não é diagonalizável mas como $d = 2$, M_{-1} é diagonalizável pelo que M_2 e M_{-1} não podem ser semelhantes.

v) Como $\det \begin{bmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = 3 \times \det \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} = -36$, pelo que a matriz é invertível para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

3.

i) $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^4 + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}^4 = 2^3 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + 2^3 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = 2^3 \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = 2^4 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 2^4 I$

pelo que $\det(M) = (2^4)^2 \det(I) = 16^2 = 256$.

ii) Só se terá $D(re^x) = \lambda re^x$ (com $r \neq 0$) isto é só se terá $re^x = \lambda re^x$ se for $\lambda = 1$, que é portanto o único valor próprio de D.