Instituto Superior Técnico 2000/2001 – 1º semestre

Álgebra Linear 1º ano das Licenciaturas em Engenharias Mecânica, Minas, Materiais e Naval

Resolução do Exame Final (2ª época) 31/1/2001

(Esta resolução refere-se apenas a um dos enunciados propostos, todos eles similares)

1) Como a matriz A é singular tem-se $\det(A) = ad - bc = 0$ e daí $d = \frac{bc}{a}$; sendo λ o valor próprio associado ao vector próprio $v = (1, -1)$ há-de ter-se $(A - \lambda I)v = 0$ ou seja

$$\begin{bmatrix} a-\lambda & b \\ c & \frac{bc}{a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

e portanto $\begin{cases} a - b = \lambda \\ c - \frac{bc}{a} = -\lambda \end{cases}$ e portanto $a - b = \frac{bc}{a} - c$ ou seja $a(a-b) = (b-a)c$ i.e. $(a-b)(a+c) = 0$ i.e. $b = a$ ou $c = -a$.

Resposta.: São as matrizes reais da forma $\begin{bmatrix} a & a \\ c & c \end{bmatrix}$ ou $\begin{bmatrix} a & b \\ -a & -b \end{bmatrix}$ com $(a \neq 0)$.

---

2) Os valores próprios da matriz M são obviamente 2 e -1 sendo as multiplicidades algébricas $\mu_a(2) = 2$ e $\mu_a(-1) = 1$; a matriz M será diagonalizável em $\mathbb{R}$ se e só se as multiplicidades geométricas forem $\mu_g(2) = 2$ e $\mu_g(-1) = 1$. Ora $\mu_g(2) = \dim_{\mathbb{R}}(\ker(M - 2I)) = 3 - \operatorname{rg}(M - 2I)$, pelo que terá de ser $\operatorname{rg}(M - 2I) = 1$; ora $M - 2I = \begin{bmatrix} 0 & k & 2k \\ 0 & -3 & k \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ tem rango 1 se e só se $k^2 + 6k = 0$ ou seja se e só se $k = 0$ ou $k = -6$.

Por outro lado $\mu_g(-1) = \dim_{\mathbb{R}}(\ker(M + I)) = 3 - \operatorname{rg}(M + I)$ pelo que terá de ser $\operatorname{rg}(M + I) = 2$ e para aqueles (e quaisquer) valores de k tem-se $\operatorname{rg}(M + I) = 2$.

Resposta.: M é diagonalizável para $k = 0$ ou $k = -6$.

---

3) Terá de ser $\det(N) = k = 0$ e 2 terá de ser raiz de $p(\lambda) = \det(N - \lambda I) = \lambda^2(h - \lambda) + k$ e como $k = 0$, terá de ser $\lambda^2(h - \lambda) = 0$ e virá $4(h - 2) = 0$ e portanto $h = 2$. Quer dizer que para estes valores $k = 0$ e $h = 2$ a matriz é $N = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ e os seus valores próprios são as raízes de $p(\lambda) = \det(N - \lambda I) = \lambda^2(2 - \lambda)$; ora a multiplicidade geométrica de 0 é $\mu_g(0) = \dim(\ker N) = 3 - \operatorname{rg}(N) = 3 - 2 = 1$, mas a multiplicidade algébrica de 0 é $\mu_a(0) = 2 \neq 1 = \mu_g(0)$; logo a diagonalização em $\mathbb{R}$ é impossível.

Resposta.: Terá de ser $h = 2$ e $k = 0$ e a diagonalização em $\mathbb{R}$ é impossível pois o valor próprio 0 (da matriz obtida com $h = 2$ e k
m multiplicidade geométrica e algébrica distintas.

---

4) Tem-se $D(1) = 0$, $D(t) = 1$, $D(t^2) = 2t$ pelo que $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

A condição $(D^2 + D + 1) \bullet p(t) = 1 + 2t$ equivale a $(A^2 + A + I) \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ ou seja que tem de ser: $c = 0$, $b = 2$, $a = -1$.

Resposta.: $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ e o polinómio pedido tem de ser $p(t) = -1 + 2t$.

---

5) $\cos\measuredangle(x, y) = \frac{\langle x, y\rangle}{\|x\|\,\|y\|} = \frac{-\sqrt{2}}{1\sqrt{4}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ logo $\measuredangle(x, y) = \arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{3\pi}{4}$.

Como $\langle x_0, x_1\rangle = 0$ basta considerar $y = x_2 - \mathrm{pr}_{x_0} x_2 - \mathrm{pr}_{x_1} x_2$.

Ora: $\mathrm{pr}_{x_0} x_2 = \frac{\langle x_2, x_0\rangle}{\|x_0\|^2} x_0 = (0, 0, 0, 0)$ e $\mathrm{pr}_{x_1} x_2 = \frac{\langle x_2, x_1\rangle}{\|x_1\|^2} x_1 = \frac{-\sqrt{2}}{1}(0, 0, -1, 0) = (0, 0, \sqrt{2}, 0)$ pelo que: $y = (-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}, 0) - (0, 0, 0, 0) - (0, 0, \sqrt{2}, 0) = (-\sqrt{2}, 0, 0, 0)$ satisfaz o pedido.

Resposta.: $\measuredangle(x, y) = \arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{3\pi}{4}$ e $y = (-\sqrt{2}, 0, 0, 0)$

---

6) Os vectores v_1, v_2, v_3 formados com os coeficientes do sistema que define L constituem um conjunto de geradores; $\dim_{\mathbb{R}} L^{\perp}$ é o rango da matriz M cujas linhas são as coordenadas desses vectores; ora $\operatorname{rg} M = 2$.

Resposta.: $v_1 = (2, 1, 3, -1), v_2 = (3, 2, 0, -2), v_3 = (3, 1, 9, -1)$; $\dim_{\mathbb{R}} L^{\perp} = 2$.

---

7) Vamos pôr $v_1(t)=u_1(t)=1$ e a questão reduz-se a determinar $v_2(t)=u_2(t)-\mathrm{pr}_{u_1(t)}u_2(t)$; ora $\mathrm{pr}_{u_1(t)}u_2(t)=\frac{\langle u_1(t),u_2(t)\rangle}{\|u_1(t)\|^2}u_1(t)$ e por um lado $\langle u_1(t),u_2(t)\rangle=I(u_1(t)u_2(t))=I(u_2(t))=I(t)=\frac{1}{2}$ e por outro $\|u_1(t)\|^2=\langle u_1(t),u_1(t)\rangle=I(1)=1$ pelo que $\mathrm{pr}_{u_1(t)}u_2(t)=\frac{1}{2}u_1(t)=\frac{1}{2}$ e portanto $v_2(t)=u_2(t)-\frac{1}{2}=t-\frac{1}{2}$.

E tem-se realmente: $\langle v_1(t),v_2(t)\rangle=I(v_1(t)v_2(t))=I(t-\frac{1}{2})=I(t)-I(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0$.

Resposta.: $(v_1(t),v_2(t))=(1,t-\frac{1}{2})$.