Instituto Superior Técnico 2000/2001 – 1º semestre

Álgebra Linear 1º ano das Licenciaturas em Engenharias Mecânica, Minas, Materiais e Naval

Resolução do Exame Final (1ª época) 15/1/2001

(Esta resolução refere-se apenas a um dos enunciados propostos, todos eles similares)

1.

1)

a) Pondo $X = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{bmatrix}$ vem

$$AX - XA = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_2 - 2y_1 & -2y_1 + 2y_2 - 2x_1 \\ 2x_1 + 2x_2 - 2y_2 & 2y_1 - 2x_2 \end{bmatrix}$$

e há que resolver $\begin{cases} 2x_2 - 2y_1 = 0 \\ -2y_1 + 2y_2 - 2x_1 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 - 2y_2 = 0 \\ 2y_1 - 2x_2 = 0 \end{cases}$ obtendo-se X na forma $X = \begin{bmatrix} y_2 - y_1 & y_1 \\ y_1 & y_2 \end{bmatrix}$.

b) Como $\mathrm{rg}(A) = \dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{im}A) = 2$ vem $\dim_{\mathbb{R}} V = \dim_{\mathbb{R}}(\ker A) = 0$ e como $X \in V$ significa que $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ e $y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$ pertencem a $\ker A$ só pode ser $V = \{0\}$ e portanto $\dim_{\mathbb{R}} V = 0$.

c) Da primeira questão resulta que $\dim_{\mathbb{R}}(\ker T) = 2$, pelo que $\dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{im}T) = 4 - 2 = 2$.

Resposta.: a) $X = \begin{bmatrix} d-c & c \\ c & d \end{bmatrix}$ com c, d em $\mathbb{R}$. b) 0 c) 2

2)

a) Identificando $at + b$ com (a, b) há que determinar ξ_1, ξ_2 tais que $(\alpha, -2) = \xi_1(1,1) + \xi_2(1,-1)$ ou seja $\begin{cases} \xi_1 + \xi_2 = \alpha \\ \xi_1 - \xi_2 = -2 \end{cases}$ e resolvendo o sistema vem $\xi_1 = -1 + \frac{1}{2}\alpha,\ \xi_2 = 1 + \frac{1}{2}\alpha$.

b) Tem de ser $\langle(\alpha, -2), (1, \alpha)\rangle = -\alpha = 0$ isto é $\alpha = 0$.

c) Trata-se da matriz A da aplicação linear $x \mapsto \mathrm{pr}_u x$ onde $x = (x_1, x_2)$ e $u = (1,1)$; ora $\mathrm{pr}_u x = \frac{x_1+x_2}{2}(1,1)$ pelo que $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Resposta.: a) $\xi_1 = -1 + \frac{1}{2}\alpha$, $\xi_2 = 1 + \frac{1}{2}\alpha$ b) $\alpha = 0$ c) $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

3)

a) $\dim_{\mathbb{C}} V = \mathrm{rg}(M)$ e o rango (ou característica) da matriz M é 2 e determina-se condensando (permutaram-se no segundo passo as linhas 2 e 3):

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \mathrm{i} \\ 1 & \mathrm{i} & 2\mathrm{i}+1 \\ 1 & -1 & 3\mathrm{i} \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & \mathrm{i} \\ 0 & \mathrm{i}-1 & \mathrm{i}+1 \\ 0 & -2 & 2\mathrm{i} \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & \mathrm{i} \\ 0 & -2 & 2\mathrm{i} \\ 0 & \mathrm{i}-1 & \mathrm{i}+1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & \mathrm{i} \\ 0 & 1 & -\mathrm{i} \\ 0 & \mathrm{i}-1 & \mathrm{i}+1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & \mathrm{i} \\ 0 & 1 & -\mathrm{i} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

pelo que $\dim_{\mathbb{C}} V = 2$.

b) Atendendo à permutação indicada resulta que os vectores v_1, v_3 formam uma base uma base de V.

c) $\det M = 0$ pois a matriz condensada tem determinante 0 e por esse facto a permutação de linhas e a multiplicação de uma linha por $-\frac{1}{2}$ não afecta o cálculo.

Resposta.: a) 2 b) $\{v_1, v_3\}$ c) 0

4)

a) Como $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix}$

vem $\mathrm{tr}(AB) = (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21}) + (a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22})$, expressão simétrica em a e b pelo que $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.

b) Pondo $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ tem-se $\det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - \mathrm{tr}(A)\lambda + \det(A)$.

c) O trinómio $\lambda^2 - \mathrm{tr}(A)\lambda + \det(A)$ terá duas raízes iguais se e só se o discriminante $\Delta = \mathrm{tr}(A)^2 - 4\det(A)$ for nulo.

RESPOSTA.: a) $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$ b) $\alpha = 1,\ \beta = -\mathrm{tr}(A),\ \gamma = \det(A)$ c) $\mathrm{tr}(A)^2 = 4\det(A)$

5)

a) Se as matrizes forem semelhantes terão de ter o mesmo traço e o mesmo determinante pelo que no nosso caso terá de ser $\begin{cases} 1+\alpha = \beta+\alpha \\ \alpha-\beta = \alpha\beta - 1 \end{cases}$ ou seja $\beta = 1$ e α um real qualquer.

b) A primeira matriz, que designaremos por A, será diagonalizável através de uma matriz real se e só se for normal — i.e. verificar $AA^t = A^tA$ — e os seus valores próprios estiverem em $\mathbb{R}$, de modo que teria de ter-se em particular

$$\begin{bmatrix} 1+\beta^2 & 1+\beta\alpha \\ 1+\beta\alpha & 1+\alpha^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & \beta+\alpha \\ \beta+\alpha & \beta^2+\alpha^2 \end{bmatrix}$$

e portanto necessariamente $\beta = 1$ ou $\beta = -1$.

1^ocaso. Seja $\beta = 1$; os valores próprios de A são as raízes de $\det(A-\lambda I) = \lambda^2 - (1+\alpha)\lambda + (\alpha - 1)$ e o discriminante deste trinómio é $\Delta = (1+\alpha)^2 - 4(\alpha-1) = \alpha^2 - 2\alpha + 5$, pelo que $\Delta \geq 0$ — e portanto os valores próprios de A serão reais — se e só se o trinómio $x^2 - 2x + 5$ for sempre ≥ 0 e tal é o caso pois o discriminante deste último trinómio é $\delta = (-2)^2 - 20 = -16 < 0$ e o coeficiente de x^2 é $1 > 0$; logo $\alpha \in \mathbb{R}$ pode ser qualquer.

2^ocaso. Seja $\beta = -1$; então vem necessariamente $\alpha = 1$.

c) A matriz B tem polinómio característico $\det(B - \lambda I) = (\lambda - 1)^2$, pelo que só há um valor próprio que é 1 e tem multiciplidade algébrica $\mu_a(1) = 2$; a sua multiplicidade geométrica $\mu_g(1)$ é a dimensão de $E(1) = \{x \in \mathbb{R}^2 :\ (B-I)x = 0\}$ ou seja a dimensão do espaço das soluções de $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, que é obviamente um espaço de dimensão 1 e portanto $\mu_a(1) \neq \mu_g(1)$, o que implica que a diagonalização não é possível.

RESPOSTA.: a) $\beta = 1$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ qualquer b) $\beta = 1$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ qualquer ou $\beta = -1$ e $\alpha = 1$ c) $\mu_a(1) = 2,\ \mu_g(1) = 1$

6)

a) $D = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ pois os valores próprios de A são $\lambda_1 = 5$ e $\lambda_2 = 2$.

b) $(1, 1)$ é vector próprio de $\lambda_1 = 5$ e $(-2, 1)$ é vector próprio de $\lambda_2 = 2$, pelo que podemos tomar $P = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

c) Como a solução geral de $y'(t) = \lambda\, y(t)$ é $y(t) = ce^{\lambda t}$ teremos $\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 e^{\lambda_1 t} \\ c_2 e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 e^{5t} \\ c_2 e^{2t} \end{bmatrix}$.

d)

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} == \begin{bmatrix} y_1(t) - 2y_2(t) \\ y_1(t) + y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 e^{5t} - 2c_2 e^{2t} \\ c_1 e^{5t} + c_2 e^{2t} \end{bmatrix}$$

e) Como $x_1(0) = 1$ e $x_2(0) = 2$ teremos $\begin{cases} c_1 - 2c_2 = 1 \\ c_1 + c_2 = 2 \end{cases}$, e portanto $c_1 = \frac{5}{3},\ c_2 = \frac{1}{3}$ e daí $\begin{bmatrix} x_1(t_0) \\ x_2(t_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{3}e^{5t_0} - \frac{2}{3}e^{2t_0} \\ \frac{5}{3}e^{5t_0} + \frac{1}{3}e^{2t_0} \end{bmatrix}$.

RESPOSTA.: a) $D = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ b) $P = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 e^{5t} \\ c_2 e^{2t} \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} x_1(t_0) \\ x_2(t_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{3}e^{5t_0} - \frac{2}{3}e^{2t_0} \\ \frac{5}{3}e^{5t_0} + \frac{1}{3}e^{2t_0} \end{bmatrix}$