Instituto Superior Técnico 1999/2000 – 1º semestre
Álgebra Linear 1º ano da Licenciatura em Engenharia Informática
Resolução do Exame Final (2ª época) **7/2/2000**

1.

i) Seja S o sub-espaço de $\mathbb{R}^3$ gerado pelos três vectores $v_1 = (1,2,2)$, $v_2 = (-1,1,1)$, $v_3 = (1,0,0)$ e seja $u = (1,1,\beta)$ onde $\beta \in \mathbb{R}$; indique a dimensão α de S e o valor ou valores de β de forma que $u \in S$.

RESPOSTA: a) $\alpha = 2$ e $\beta = 1$ ☒ b) $\alpha = 2$ e $\beta = 0$ ☐ c) $\alpha \neq 0$ e $\beta = 3$ ☐
d) $\alpha = 3$ e β é qualquer elemento de $\mathbb{R}$ ☐ e) $\alpha = 2$ e β é qualquer elemento de $\mathbb{R}$ ☐ f) $\alpha = 2$ e $\beta \neq 0$ ☐

ii) Considere em $\mathbb{R}^3$ o produto interno euclidiano usual, o sub-espaço S da questão anterior e os cinco vectores $v_1 = (1,2,2)$, $v_2 = (-1,1,1)$, $v_3 = (1,0,0)$, $v_4 = (1,-1,0)$, $v_5 = (0,1,1)$ e diga qual dos seguintes conjuntos constitui uma base ortonormada para S.

RESPOSTA: a) $\{\frac{1}{\sqrt{3}}v_1, v_2, v_3\}$ ☐ b) $\{v_3, v_5\}$ ☐ c) $\{v_3, v_4\}$ ☐ d) $\{v_3, \frac{1}{\sqrt{2}}v_5\}$ ☒
e) $\{\frac{1}{\sqrt{2}}v_1, v_3\}$ ☐ f) $\{v_3, \frac{1}{\sqrt{2}}v_4\}$ ☐

iii) Considere em $\mathbb{R}^3$ o produto interno euclidiano usual e o sub-espaço S da primeira questão, bem como o seu complemento ortogonal $S^\perp$ e diga qual das seguintes asserções é verdadeira:

RESPOSTA: a) $S^\perp = \ll (1,0,1), (0,-1,1) \gg$ ☐ b) $S^\perp = \ll (1,0,2) \gg$ ☐ c) $S^\perp = \emptyset$ ☐
d) $S^\perp = \ll (0,-1,1) \gg$ ☒ e) $S^\perp = \ll (1,0,1) \gg$ ☐ f) $S^\perp = \{0\}$ ☐

iv) Considere a aplicação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $T(x) = \mathrm{pr}_S x$ onde $\mathrm{pr}_S : \mathbb{R}^3 \to S$ é a projecção ortogonal sobre o sub-espaço da primeira questão e diga qual é a matriz M que representa T na base canónica de $\mathbb{R}^3$:

RESPOSTA: a) $M = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ ☐ b) $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$ ☒ c) $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ ☐
d) $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ ☐ e) $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$ ☐ f) $M = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1 \end{bmatrix}$ ☐

v) Sendo S o sub-espaço da primeira questão diga qual é a distância de $(0,0,1)$ a S:

RESPOSTA: a) $\sqrt{2}$ ☐ b) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ☒ c) 1 ☐ d) $1+\sqrt{2}$ ☐ e) 0 ☐ f) $\sqrt{2}-1$ ☐

vi) Sendo M a matriz seleccionada na questão **iv)** existe uma matriz P tal que P^tMP é diagonal; diga qual das matrizes seguintes é a matriz P:

RESPOSTA.: a) $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ☐ b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ☐ c) $\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ☐
d) $\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ ☐ e) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ ☒ f) $\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 \end{bmatrix}$ ☐

2.

i) Quais os números complexos u e v que satisfazem ao sistema seguinte: $\begin{cases} \mathrm{i}u + 2v = 2 \\ (1-\mathrm{i})u + \mathrm{i}v = 3 - \mathrm{i} \end{cases}$

RESP.: a) $u = 1$ e $v = 1 + \mathrm{i}$ ☐ b) $u = \mathrm{i} - 1$ e $v = 1 + \mathrm{i}$ ☐ c) $u = \mathrm{i} + 1$ e $v = 1 + \mathrm{i}$ ☐
d) $u = 2$ e $v = 1 - \mathrm{i}$ ☒ e) $u = 2 - \mathrm{i}$ e $v = 1$ ☐ f) $u = \mathrm{i}$ e $v = 1 - \mathrm{i}$ ☐

ii) Determine um valor de $\lambda \in \mathbb{C}$ de tal forma que os vectores $v_1 = (\lambda, 2, \mathrm{i})$, $v_2 = (0, 0, 1)$, $v_3 = (\mathrm{i}, 2\mathrm{i}, -1)$ em $\mathbb{C}^3$ sejam linearmente dependentes.

RESP.: a) $\lambda = -1$ ☐ b) $\lambda = -\mathrm{i}$ ☐ c) $\lambda = 0$ ☐ d) $\lambda = 1$ ☒ e) $\lambda = 2$ ☐ f) $\lambda = \mathrm{i}$ ☐

iii) Considere as aplicações lineares de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}$ dadas por $\alpha_1(x_1, x_2, x_3) = x_1 - 2x_2 + x_3$ e $\alpha_2(x_1, x_2, x_3) = 2x_1 + x_3$ e sejam U_1 e U_2 os respectivos núcleos; calcule as dimensões n de $U_1 \cap U_2$ e m de $U_1 + U_2$.

RESP.: a) $n = 1$ e $m = 3$ ☒ b) $n = 2$ e $m = 1$ ☐ c) $n = 1$ e $m = 1$ ☐
d) $n = 3$ e $m = 0$ ☐ e) $n = 0$ e $m = 3$ ☐ f) $n = 2$ e $m = 2$ ☐

iv) Considere o espaço vectorial $\mathcal{P}$ dos polinómios $p(x) = a_0 + a_1 x$ com coeficientes reais e a aplicação linear T de $\mathcal{P}$ em $\mathcal{P}$ que transforma $p_1(x) = 1$ em $q_1(x) = -5 - 9x$ e transforma $p_2(x) = x$ em $q_2(x) = 4 + 7x$, isto é $T(p_1(x)) = q_1(x)$ e $T(p_2(x)) = q_2(x)$; determine o conjunto V dos polinómios $p(x)$ de $\mathcal{P}$ que são pontos fixos de T, isto é, tais que $T(p(x)) = p(x)$.

RESP.: a) $V = \ll 3 + 2x \gg$ ☐ b) $V = \ll -3 + 2x \, , \, x \gg$ ☐ c) $V = \ll -3 + 2x \gg$ ☐
d) $V = \ll 3 - 3x \gg$ ☐ e) $V = \ll 2 + 3x \, , \, -x \gg$ ☐ f) $V = \ll 2 + 3x \gg$ ☒

v) Sendo T a aplicação linear de $\mathcal{P}$ em $\mathcal{P}$ da questão anterior diga qual das seguintes asserções é correcta:

RESP.: a) A matriz de T na base $\{1 + x \, , \, 1 - x\}$ é diagonalizável ☐ b) Na base $\{-3 + 2x \, , \, x\}$ a matriz de T é diagonal ☐ c) Numa base adequada a matriz de T é $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ☐ d) T não é diagonalizável ☒
e) $\{x \, , \, -3 + 2x\}$ é uma base própria de T. ☐ f) $\{-3 + 2x\}$ é uma base própria de T. ☐

vi) Sabendo que a matriz $A = \begin{bmatrix} 16 & -21 \\ 10 & -13 \end{bmatrix}$ satisfaz $A = PDP^{-1}$ onde $P = \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ e D é diagonal calcule A^4.

RESP.: a) $\begin{bmatrix} 226 & -315 \\ 150 & -209 \end{bmatrix}$ ☒ b) $\begin{bmatrix} 226 & -315 \\ -209 & 90 \end{bmatrix}$ ☐ c) $\begin{bmatrix} -209 & -315 \\ 90 & 226 \end{bmatrix}$ ☐
d) $\begin{bmatrix} -209 & -315 \\ 90 & 226 \end{bmatrix}$ ☐ e) $\begin{bmatrix} 226 & 150 \\ -315 & -209 \end{bmatrix}$ ☐ f) $\begin{bmatrix} 226 & 90 \\ -209 & -315 \end{bmatrix}$ ☐

vii) Considere duas funções $x_1(t)$ e $x_2(t)$ de variável t, compondo a matriz coluna $x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$, e com derivadas $x_1'(t)$ e $x_2'(t)$, satisfazendo o sistema $\begin{cases} x_1'(t) = 16x_1(t) - 21x_2(t) \\ x_2'(t) = 10x_1(t) - 13x_2(t) \end{cases}$, ou seja $x'(t) = A.x(t)$ (onde A é como em **vi)**) e através de uma mudança de funções $x(t) = P.\,y(t)$ (onde P é como em **vi)** e $y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}$) obtenha um novo sistema relativo a $y(t)$ cujas soluções gerais são:

RESP.: a) $y_1(t) = k_1(\cos t)\, e^t$ e $y_2(t) = k_2(\mathrm{sen}\, t)\, e^{2t}$ ☐ b) $y_1(t) = k_1(1 + t)e^{2t}$ e $y_2(t) = k_2 e^{2t}$ ☐
c) $y_1(t) = k_1 e^{2t}$ e $y_2(t) = (1 + t^2)\, k_2 e^{2t}$ ☐ d) $y_1(t) = k_1(\cos t)e^{2t}$ e $y_2(t) = k_2(\mathrm{sen}\, t)e^t$ ☐
e) $y_1(t) = k_1 e^t$ e $y_2(t) = k_2 e^{2t}$ ☒ f) $y_1(t) = k_1 t e^{2t}$ e $y_2(t) = k_2 e^t$ ☐

viii) O sistema $x'(t) = A.x(t)$ da questão anterior tem como soluções gerais:

RESP.: a) $x_1(t) = 7k_1(\cos t)e^t + 5k_2 e^{2t}$ e $x_2(t) = 3k_1 e^t + 2k_2 e^{2t}$ ☐
b) $x_1(t) = 7k_1 e^t + 5k_2 e^{2t}$ e $x_2(t) = 3k_1 e^t + 2k_2 e^{2t}$ ☒
c) $x_1(t) = 7k_1 e^t + 5k_2(\mathrm{sen}\, t)e^{2t}$ e $x_2(t) = 3k_1 e^t + 2k_2 e^{2t}$ ☐ d) $x_1(t) = 7k_1 e^t$ e $x_2(t) = 2k_2 e^{2t}$ ☐
e) $x_1(t) = 5k_1 e^{2t}$ e $x_2(t) = 3k_2 e^t$ ☐ f) $x_1(t) = 7k_1 t e^t$ e $x_2(t) = 3k_2 e^t$ ☐