Instituto Superior Técnico 2004/2005 – 1º semestre

Álgebra Linear 1º ano da Licenciatura em Engenharia Informática (Alameda)

Resolução *detalhada* do Exame Final (2ª época) **25/1/2005**

(Esta resolução refere-se apenas a um dos enunciados propostos, todos eles similares)

1. Considere o espaço vectorial V formado pelos polinómios $f(\mathrm{x}) = a_0 + a_1\mathrm{x} + a_2\,\mathrm{x}^2 + a_3\,\mathrm{x}^3$ na variável x com coeficientes em $\mathbb{R}$ definindo-se a soma de polinómios e o produto de um número real por um polinómio como usualmente;e considere a aplicação $\mathbb{R}$-linear $T : V \to V$ dada por

$$T(f(\mathrm{x})) = (1 - \mathrm{x}^2)\, f''(\mathrm{x}) + \mathrm{x}\, f'(\mathrm{x})$$

onde $f'(\mathrm{x})$ e $f''(\mathrm{x})$ designam respectivamente a primeira e a segunda derivada do polinómio $f(\mathrm{x})$.

i) Determine a matriz A de T com relação à base ordenada — ou referencial — dada por 1,x,x^2,x^3 (nesta ordem).

Resposta: $T(f(\mathrm{x})) = (1-\mathrm{x}^2)\, f''(\mathrm{x}) + \mathrm{x}\, f'(\mathrm{x}) = 2a_2 + (a_1 + 6a_3)\mathrm{x} + (-3a_3)\mathrm{x}^3$ e portanto em particular:

$$\begin{array}{l} T(1) = 0 \\ T(\mathrm{x}) = \mathrm{x} \\ T(\mathrm{x}^2) = 2 \\ T(\mathrm{x}^3) = 6\mathrm{x} - 3\mathrm{x}^3 \end{array} \qquad \text{pelo que} \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

ii) Calcule o determinante de T e de $T^5 = T \circ T \circ T \circ T \circ T$, onde o símbolo $\circ$ designa composição.

Resposta: $\det(T) = \det(A)$ e como A tem uma coluna nula vem $\det(A) = 0$.
$\det(T^5) = \det(A^5) = \det(A)^5 = 0^5 = 0$.

iii) Determine uma base para o núcleo $\ker(T)$.

Resposta: Dado que $T(f(\mathrm{x})) = 2a_2 + (a_1 + 6a_3)\mathrm{x} + (-3a_3)\mathrm{x}^3$ resulta que $T(f(\mathrm{x}))$ será o polinómio nulo se e só se $a_2 = 0,\ a_1 + 6a_3 = 0,\ -3a_3 = 0$ isto é se e só se $a_1 = a_2 = a_3 = 0$, sendo $a_0 \in \mathbb{R}$ qualquer e portanto $\ker(T) = \mathbb{R}$ pelo que qualquer real $\alpha \neq 0$ constitui uma base $\{\alpha\}$.

iv) Mostre que 0 é um valor próprio de T e determine uma base para o espaço próprio $E_T(0)$ de T associado a 0.

Resposta: Os valores próprios de T são as raízes de $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ e como $\det(A) = 0$ é claro que $p(0) = \det(A)$ e portanto $p(0) = 0$.
$E_T(0) = \ker(T - 0I) = \ker(T)$ e já se viu que qualquer real $\alpha \neq 0$ constitui uma base $\{\alpha\}$ de $\ker(T)$ ou seja de $E_T(0)$.

v) Sabendo que o polinómio característico $p_T(\lambda)$ de T é da forma $p_T(\lambda) = \lambda^2\, g(\lambda)$, diga, *justificando cuidadosamente a resposta*, se é possível encontrar uma base ordenada de V com relação à qual a matriz de T seja diagonal.

Sugestão: *Use o resultado da alínea anterior.*

Resposta: Como $p_T(\lambda) = \lambda^2\, g(\lambda)$ vê-se que a multiplicidade algébrica $\mu(0)$ de 0 verifica $\mu(0) \geq 2$; ora viu-se na alínea anterior que a multiplicidade geométrica $\gamma(0)$ de 0 é $\gamma(0) = 1$, pelo que $\mu(0) \neq \gamma(0)$ e a diagonalização em $\mathbb{R}$ é impossível.

2. Considere a matriz $A_a = \begin{bmatrix} 2 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & 2 \end{bmatrix}$ onde a é um parâmetro real e a partir dela defina o seguinte polinómio $q(\mathrm{X},\mathrm{Y},\mathrm{Z})$ nas variáveis X,Y e Z:

$$q(\mathrm{X},\mathrm{Y},\mathrm{Z}) = \begin{bmatrix} \mathrm{X} & \mathrm{Y} & \mathrm{Z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{X} \\ \mathrm{Y} \\ \mathrm{Z} \end{bmatrix} = 2\mathrm{X}^2 + \mathrm{Y}^2 + 2\mathrm{Z}^2 + 2a\mathrm{XZ}$$

i) Determine uma matriz B_a tal que $B_a = P^t A_a P$ onde P é uma matriz ortogonal $P \in \mathrm{M}(3,\mathbb{R})$ — i.e. tal que $P^t = P^{-1}$ — que *não necessita especificar.*

NOTA: *Observe que 1 é um valor próprio de A_a.*

RESPOSTA: Basta calcular os valores próprios de $A_a = \begin{bmatrix} 2 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & 2 \end{bmatrix}$ e como um dos valores próprios é igual a 1, dividindo $p_T(\lambda) = \lambda^3 - 5\lambda^2 + (8-a^2)\lambda + (-4+a^2)$ por $\lambda - 1$ obtém-se $\lambda^2 - 4\lambda - a^2 + 4 = (\lambda - a - 2)\,(\lambda + a - 2)$ ou seja $p_T(\lambda) = (\lambda - 1)\lambda - a - 2)\,(\lambda + a - 2)$ e os valores próprios são: $1, 2+a, 2-a$.

$$B_a = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2+a & 0 \\ 0 & 0 & 2-a \end{bmatrix}$$

ii) Sendo P uma matriz como a que se refere na alínea anterior defina as variáveis X',Y' e Z' através de $\begin{bmatrix} \mathrm{X} \\ \mathrm{Y} \\ \mathrm{Z} \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} \mathrm{X}' \\ \mathrm{Y}' \\ \mathrm{Z}' \end{bmatrix}$ e verificando que $q(\mathrm{X},\mathrm{Y},\mathrm{Z}) = \begin{bmatrix} \mathrm{X}' & \mathrm{Y}' & \mathrm{Z}' \end{bmatrix} B_a \begin{bmatrix} \mathrm{X}' \\ \mathrm{Y}' \\ \mathrm{Z}' \end{bmatrix}$, use este facto para determinar para que valores de $a \in \mathbb{R}$ o valor $q(u)$ do polinómio $q(\mathrm{X},\mathrm{Y},\mathrm{Z})$ em qualquer $u = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}$ é sempre ≥ 0.

RESPOSTA: Como $q(\mathrm{X},\mathrm{Y},\mathrm{Z}) = 2\mathrm{X}^2 + \mathrm{Y}^2 + 2\mathrm{Z}^2 + 2a\mathrm{XY} = (\mathrm{X}')^2 + (2+a)\,(\mathrm{Y}')^2 + (2-a)(\mathrm{Z}')^2$ o número $q(u)$ será sempre ≥ 0 se e só se os coeficientes $2+a$ e $2-a$ o forem ou seja se e só se $-2 \leq a \leq 2$ ou ainda se e só se $|a| \leq 2$.

iii) Existirá alguma matriz $Q \in \mathrm{M}(3,\mathbb{R})$ tal que para algum $a \in \mathbb{R}$ se tenha $Q^{-1}A_aQ = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$ com $\lambda \in \mathbb{R}$? *Justifique a resposta.*

RESPOSTA: Se existisse uma tal matriz Q, os valores próprios de A_a seriam todos iguais a λ. Como os valores próprios de A_a são: $1, 2+a, 2-a$ eles só seriam iguais a um certo $\lambda \in \mathbb{R}$ se se tivesse $\lambda = 1$, $\lambda = 2+a$ e $\lambda = 2-a$ o que implicaria $2+a = 1$ e $2-a = 1$ e portanto $a = -1$ e $a = 1$ o que é impossível. Logo, não pode existir uma tal matriz Q.

iv) *Determine uma matriz* $R \in \mathrm{M}(3,\mathbb{R})$ tal que para algum valor possível α, de a — valor que indicará — se tenha $R^{-1}A_aR = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$.

RESPOSTA:Os valores próprios de A_a são: $1, 2-a, 2+a$, pelo que terá de ser $a = 2$, ou seja $\alpha = 2$, ou então $a = -2$, ou seja $\alpha = -2$. Vamos tomar $\alpha = 2$.

Há pois que diagonalizar a matriz $A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$; ora ordenando os valores próprios pela ordem seguinte: $0, 1, 4$ e atendendo a que os correspondentes espaços próprios são gerados respectivamente por $(-1,0,1)$, $(0,1,0)$, $(1,0,1)$ podemos tomar como matriz R a matriz $R = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

v) Considerando em $\mathbb{R}^3$ o produto interno usual dado por $\langle x, y \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$ e considerando um valor α indicado atrás, determine um referencial *ortonormado* tal que a matriz M da aplicação linear $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $\varphi(x) = A_\alpha \,.\, x$ seja $M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$.

RESPOSTA: Basta considerar os vectores $v_1 = (-1,0,1)$, $v_2 = (0,1,0)$, $v_3 = (1,0,1)$ que são ortogonais e normalizá-los, obtendo-se $u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1)$, $u_2 = (0,1,0)$, $u_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)$ e (u_1, u_2, u_3) é o referencial pedido.