Instituto Superior Técnico 2004/2005 – 1º semestre

Álgebra Linear 1º ano da Licenciatura em Engenharia Informática (Alameda)

Resolução *detalhada* do Exame Final (1ª época) 11/1/2005

(Esta resolução refere-se apenas a um dos enunciados propostos, todos eles similares)

1. Seja $A_\alpha = \begin{bmatrix} -1 & \alpha+2 \\ \alpha+2 & -1 \end{bmatrix}$ uma matriz em que α é um parâmetro real.

i) Determine α de modo que A_α tenha apenas um valor próprio com multiplicidade algébrica 2.

Resposta: Os valores próprios de A_α são as raízes de $p_{A_\alpha}(\lambda) = \det(A_\alpha - \lambda I) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & \alpha+2 \\ \alpha+2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 2\lambda - (\alpha^2+4\alpha+3)$ que serão iguais quando $\Delta = 2^2 - 4[-(\alpha^2+4\alpha+3)] = 4\alpha^2 + 16\alpha + 16 = 4(\alpha^2+4\alpha+4) = 4(\alpha+2)^2$ for igual a 0 ou seja quando $\alpha = -2$.

ii) Determine uma matriz real P ortogonal — i.e tal que $P^{-1} = P^t$ — que diagonaliza a matriz A_α, para todo o real α, ou seja tal que $P^{-1}A_\alpha P$ seja uma matriz real diagonal D que determinará.

Resposta:

Os valores próprios de $A_\alpha$são as raízes de $p_{A_\alpha}(\lambda)$ ou seja as soluções da equação $\lambda^2 + 2\lambda - (\alpha^2+4\alpha+3) = 0$, que são dadas abreviadamente por:

$\lambda = \frac{-2\pm\sqrt{4-4(-(\alpha^2+4\alpha+3))}}{2} = -1 \pm \sqrt{\alpha^2+4\alpha+4} = -1 \pm \sqrt{(\alpha+2)^2} = -1 \pm |\alpha+2|$.

Quer dizer que as raízes são:

$$\lambda_1 = -1 + (\alpha+2) = \alpha+1 \qquad \text{e} \qquad \lambda_2 = -1 - (\alpha+2) = -\alpha-3\ .$$

Calculemos os vectores próprios associados a $\lambda_1 = \alpha+1$: há que resolver a equação $[A_\alpha - (\alpha+1)I]\,\mathrm{x} = 0$ ou seja $\begin{bmatrix} -2-\alpha & \alpha+2 \\ \alpha+2 & -2-\alpha \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathrm{x}_1 \\ \mathrm{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ e as soluções são da forma (γ,γ) com $\gamma \in \mathbb{R}$.

Calculemos os vectores próprios associados a $\lambda_2 = -\alpha-3$: há que resolver a equação $[A_\alpha - (-\alpha-3)I]\,\mathrm{x} = 0$ ou seja $\begin{bmatrix} \alpha+2 & \alpha+2 \\ \alpha+2 & \alpha+2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathrm{x}_1 \\ \mathrm{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ e as soluções são da forma $(-\delta,\delta)$ com $\delta \in \mathbb{R}$. Escolhendo dois vectores próprios, um — por exemplo $(1,1)$ — relativo a λ_1 e outro — por exemplo $(-1,1)$ — relativo a λ_2 e tomando as suas coordenadas na base canónica como colunas obtemos uma matriz R diagonalizadora de A_α: $R = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Normalizando os vectores $(1,1)$ e $(-1,1)$ — ambos de norma $\sqrt{2}$ — obtemos os vectores próprios $\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$ e $\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1)$ e a matriz ortogonal pedida é $P = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Teremos $P^{-1}A_\alpha P = D$ com $D = \begin{bmatrix} \alpha+1 & 0 \\ 0 & -\alpha-3 \end{bmatrix}$.

iii) Sejam $x_1(t)$ e $x_2(t)$ duas funções reais da variável real $t \in \mathbb{R}$ e com derivadas $x_1'(t)$ e $x_2'(t)$ em $\mathbb{R}$, tais que se tenha $\begin{cases} x_1'(t) = -x_1(t) + (\alpha+2)\,x_2(t) \\ x_2'(t) = (\alpha+2)\,x_1(t) - x_2(t) \end{cases}$ ou seja, escrevendo matricialmente, $x'(t) = A_\alpha\, x(t)$ onde $x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$; definindo $y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}$ através de $x(t) = R\ y(t)$ onde R diagonaliza a matriz A_α, obtenha uma matriz diagonal $B \in \mathrm{M}(2,\mathbb{R})$, dependente do parâmetro α, tal que a relação $y'(t) = B\ y(t)$ seja verificada e obtenha todas as funções $y_1(t)$, $y_2(t)$ que satisfaçam essa relação.

Observação: Note que a matriz R não tem que ser necessariamente ortogonal e que $R^{-1}A_\alpha R = B$.

Resposta:

A matriz B é $B = \begin{bmatrix} \alpha+1 & 0 \\ 0 & -\alpha-3 \end{bmatrix}$ e para R basta tomar $R = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

A equação $\begin{bmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha+1 & 0 \\ 0 & -\alpha-3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}$ tem como solução geral

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{(\alpha+1)t}k_1 \\ e^{-(\alpha+3)t}k_2 \end{bmatrix} \qquad \text{com } k_1 \text{ e } k_2 \text{ em } \mathbb{R}.$$

iv) Obtenha todas as funções $x_1(t)$, $x_2(t)$ de tal forma que $x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$ satisfaça a relação $x'(t) = A_\alpha\, x(t)$.

RESPOSTA:
Como $x(t) = R\ y(t)$ vem $\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1(t) - y_2(t) \\ y_1(t) + y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{(\alpha+1)t}k_1 - e^{-(\alpha+3)t}k_2 \\ e^{(\alpha+1)t}k_1 + e^{-(\alpha+3)t}k_2 \end{bmatrix}$
com k_1 e k_2 em $\mathbb{R}$.

v) Determine as únicas funções $x_1(t)$, $x_2(t)$ de tal forma que $x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$ satisfaça a relação $x'(t) = A_\alpha\, x(t)$ e além disso se tenha $\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

RESPOSTA:
Como $\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 - k_2 \\ k_1 + k_2 \end{bmatrix}$ tem de ser $\begin{bmatrix} k_1 - k_2 \\ k_1 + k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$ ou seja $k_1 = -1$ e $k_2 = 0$.

2. Considere o espaço euclidiano $\mathbb{R}^3$, com o produto interno usual $\langle \ldots, \ldots \rangle$, considere o subespaço vectorial L gerado por $u = (-1, 0, 1)$ e considere o vector $a = (-1, 0, \gamma)$, onde γ é um parâmetro real *não nulo*.

i) Considere a aplicação $\mathbb{R}$-linear $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, dada por $\varphi(x) = \langle x, u \rangle$ e calcule a dimensão do núcleo $\ker(\varphi)$.

RESPOSTA:
$\dim_{\mathbb{R}}(\ker(\varphi)) + \dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{im}\,(\varphi)) = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3$ ou seja $\dim_{\mathbb{R}}(\ker(\varphi)) + 1 = 3$ pelo que $\dim_{\mathbb{R}}(\ker(\varphi)) = 2$.

ii) Determine uma base *ortogonal* $\{v_1, v_2\}$ para o subespaço vectorial $L^\perp$ definido por $L^\perp = \{x \in \mathbb{R}^3 : \quad \langle x, u \rangle = 0\}$, chamado o complemento ortogonal de L.

RESPOSTA:
Como $\langle x, u \rangle = \langle (x_1, x_2, x_3)\ ,\ (-1, 0, 1) \rangle = -x_1 + x_3$ os elementos de $L^\perp$ são as soluções do sistema (de uma só equação) $-x_1 + x_3 = 0$ ou seja são os ternos (x_1, x_2, x_3) em que $x_1 = x_3$, ou seja são os ternos da forma (α, β, α) com α e β em $\mathbb{R}$. Uma base de $L^\perp$ é pois por exemplo $\{(1,0,1), (0,1,0)\}$ mas os vectores $(1,0,1)$ e $(0,1,0)$ são ortogonais pelo que basta pôr $v_1 = (1,0,1)$ e $v_2 = (0,1,0)$.

iii) Calcule o vector $\mathrm{pr}_{L^\perp} a = \mathrm{pr}_{v_1} a + \mathrm{pr}_{v_2} a$, projecção de a sobre o complemento ortogonal de L.

RESPOSTA:
Tem-se $\mathrm{pr}_{v_1} a = \frac{\langle a, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1 = \frac{\langle a, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1 = \frac{\langle (-1,0,\gamma), (1,0,1) \rangle}{2} (1,0,1) = \frac{-1+\gamma}{2} (1,0,1)$
e
tem-se $\mathrm{pr}_{v_2} a = \frac{\langle a, v_2 \rangle}{\|v_2\|^2} v_2 = \frac{\langle a, v_2 \rangle}{\langle v_2, v_2 \rangle} v_2 = \frac{\langle (-1,0,\gamma), (0,1,0) \rangle}{2} (0,1,0) = \frac{0}{2} (1,0,1) = (0,0,0)$;
quer dizer: $\mathrm{pr}_{L^\perp} a = \mathrm{pr}_{v_1} a = \frac{-1+\gamma}{2} (1,0,1)$.

iv) Convenhamos chamar *distância* entre um vector $a \in \mathbb{R}^3$ e um subespaço vectorial S de $\mathbb{R}^3$ ao comprimento $d(a, S)$ do vector $\mathrm{pr}_{S^\perp} a$ (projecção de a sobre $S^\perp$); calcule então a distância $d(a, L)$ entre a e L quando $a = (1, 0, \gamma)$.

RESPOSTA:
$$d(a, L) = \|\mathrm{pr}_{L^\perp} a\| = \sqrt{\left\langle \tfrac{-1+\gamma}{2} (1,0,1)\, ,\, \tfrac{-1+\gamma}{2} (1,0,1) \right\rangle} = \sqrt{\left(\tfrac{-1+\gamma}{2}\right)^2 2} = \sqrt{\left(\tfrac{-1+\gamma}{2}\right)^2 2} = \tfrac{\sqrt{2}}{2} |-1+\gamma|$$

v) Seja T uma transformação de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}^3$ dada por

$$T(x,y,z) = (-x+y-z\ ,\ -x-y-z\ ,\ x+z)\ ;$$

determine uma base ortogonal para o núcleo da transformação, $\ker(T)$, e uma base ortogonal para o complemento ortogonal, $(\ker(T))^\perp$, desse núcleo.

RESPOSTA:
$\ker(T) = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \quad (-x+y-z\ ,\ -x-y-z\ ,\ x+z) = (0,0,0)\big\}$ é o conjunto das soluções do sistema
$\begin{cases} -x+y-z = 0 \\ -x-y-z = 0 \quad \text{ou seja} \\ \quad x+z = 0 \end{cases}$
$\ker(T) = \{(-\alpha, 0, \alpha) \text{ com } \alpha \in \mathbb{R}\} = \ll (-1,0,1) \gg$ e já se viu em 2 i) que $L = \ll (-1,0,1) \gg$ e que $L^\perp = (\ker(T))^\perp$ tem uma base ortogonal dada por $v_1 = (1,0,1)$ e $v_2 = (0,1,0)$. A base $\{u\}$ de L e a base $\{v_1, v_2\}$ respondem pois à questão.