Instituto Superior Técnico 2003/2004 – 1º semestre
Álgebra Linear 1º ano da Licenciatura em Engenharia Informática

Resolução detalhada do exame Final (2ª época) **26/1/2004**

Duração: 2h00 **Cotação:** 2 por questão.

1. i) É necessário resolver a equação característica $\det(A_\alpha - \lambda I) = \begin{vmatrix} \alpha+2-\lambda & \alpha-2 & 0 \\ \alpha-2 & \alpha+2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)^2(2\alpha-\lambda)$ o que nos dá dois valores próprios; $\lambda_1 = 4$, com multiplicidade algébrica $\mu_a(4) = 2$ e $\lambda_2 = 2\alpha$ com multiplicidade algébrica $\mu_a(2\alpha) = 1$; note-se que como $\alpha \neq 2$ o valor próprio 4 não se pode repetir.

ii) Para obter o espaço próprio correspondente a $\lambda = 4$ tem que se resolver a equação: $\begin{bmatrix} \alpha-2 & \alpha-2 & 0 \\ \alpha-2 & \alpha-2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ como $\alpha \neq 2$, o resultado é muito simples, $x_1 = -x_2$ com duas variáveis livres, ou seja $E(4)$ terá multiplicidade geométrica $\mu_g(4) = 2$ (como não podia deixar de ser, uma vez que A_α é uma matriz real simétrica e, neste caso, as multiplicidades algébricas coincidem sempre com as multiplicidades geométricas). Temos então

$$\begin{cases} x_1 = & -t \\ x_2 = & t \\ x_3 = & w \end{cases}$$

em que t e w são dois parâmetros reais livres. Uma base para este espaço próprio será $\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$.

Dividindo pela norma teremos uma base ortonormada $\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$

Associado ao valor próprio $\lambda = 2\alpha$ temos o sistema $\begin{bmatrix} -\alpha+2 & \alpha-2 & 0 \\ \alpha-2 & -\alpha+2 & 0 \\ 0 & 0 & 4-2\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, o que se traduz muito simplesmente em $x_1 = x_2$ e $x_3 = 0$; uma vez que $\alpha \neq 2$, existe apenas uma variavel livre e a multiplicidade geométrica deste espaço próprio será $\mu_g(2\alpha) = 1$. O sistema pode ser escrito na forma $\begin{cases} x_1 = & t \\ x_2 = & t \\ x_3 = & 0 \end{cases}$ em que t é um parâmetro real livre. A base do espaço próprio é por exemplo $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$. Dividindo pela norma teremos uma base ortonormada $\left\{ \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ de $E(2\alpha)$.

Uma matriz ortogonal P tal que $P^{-1}A_\alpha P$ seja diagonal é $P = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ e então $P^{-1}A_\alpha P = \Lambda$ com $\Lambda = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2\alpha \end{bmatrix}$.

iii) Para resolver $x'(t) = A\,x(t)$, ao fazer a mudança de função incógnita $x(t) = P\,y(t)$ onde $y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{bmatrix}$ reduzimos o problema à resolução de $y'(t) = \Lambda\,y(t)$ ou seja a resolução de $\begin{cases} y_1'(t) = 4\,y_1(t) \\ y_2'(t) = 4\,y_2(t) \\ y_2'(t) = 2\alpha\,y_2(t) \end{cases}$ obtendo-se como solução geral $y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1\,e^{4t} \\ c_2\,e^{4t} \\ c_3\,e^{2\alpha t} \end{bmatrix}$ onde c_1, c_2, c_3 são constantes reais. Como $x(t) = P\,y(t)$ vem:

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1\,e^{4t} \\ c_2\,e^{4t} \\ c_3\,e^{2\alpha t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2}c_2e^{4t} + \frac{\sqrt{2}}{2}c_3e^{2\alpha t} \\ \frac{\sqrt{2}}{2}c_2e^{4t} + \frac{\sqrt{2}}{2}c_3e^{2\alpha t} \\ c_1e^{4t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}\left(-c_2e^{4t} + c_3e^{2\alpha t}\right) \\ \frac{\sqrt{2}}{2}\left(c_2e^{4t} + c_3e^{2\alpha t}\right) \\ c_1e^{4t} \end{bmatrix}$$

2. i) Escrevemos $g_{\beta,\gamma}\left(\,(x_1,x_2)\,,(y_1,y_2)\,\right)=2x_1y_1+2x_2y_2+\beta x_1y_2+\gamma x_2y_1$ na forma

$$g_{\beta,\gamma}\left(\,(x_1,x_2)\,,(y_1,y_2)\,\right)=\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & \beta \\ \gamma & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix};$$

para que se verifique a simetria de $g_{\beta,\gamma}$ basta que a matriz real $\begin{bmatrix} 2 & \beta \\ \gamma & 2 \end{bmatrix}$ seja simétrica, o que implica que $\beta=\gamma$; para a positividade é necessário que os dois determinantes menores principais M_1 e M_2 sejam positivos; ora $M_1=2>0$ e basta então que $M_2=4-\beta^2>0$, o que implica que $-2<\beta<2$.

ii) Basta resolver o sistema $\begin{bmatrix} 1 & b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=0$ o que se traduz por $x_1=-\frac{(2b+1)}{b+2}x_2$ e como $b\neq-2$, não existe qualquer problema com o denominador. Logo uma base para $L^{\perp}$ é $\left\{\begin{bmatrix} -(2b+1) \\ b+2 \end{bmatrix}\right\}$.

iii) $\begin{bmatrix} b & b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -b \\ b \end{bmatrix}=0$ pelo que os vectores são perpendiculares, ou seja o ângulo é igual a $\frac{\pi}{2}$ (radianos).

iv) Calcula–se o produto interno $\langle(1,0)\,,(0,1)\rangle=1$; como os vectores não são ortogonais temos de usar o método de Gram-Schmidt, $u_1=(1,0)$,
$u_2=(0,1)-\frac{\langle(1,0),(0,1)\rangle}{\langle(1,0),(1,0)\rangle}(1,0)=\left(-\frac{1}{2},1\right)$. Calcula-se as normas usando o produto interno dado, a do primeiro vector, $(1,0)$, é $\sqrt{2}$, a do segundo vector, $\left(-\frac{1}{2},1\right)$, é $\sqrt{\frac{3}{2}}$. Uma base ortonormada será $\left\{\left(\frac{\sqrt{2}}{2},0\right),\left(-\frac{\sqrt{6}}{6},\frac{\sqrt{6}}{3}\right)\right\}$, obtida a partir dos vectores anteriores dividindo cada um pela sua norma.

3. i) A matriz $A_\theta=\begin{bmatrix} \theta & 1 & 1 \\ 1 & \theta & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ é não invertível quando o seu determinante é 0, como $\det A_\theta=2\theta^2-2\theta$, vê-se facilmente que tem raízes 0 e 1, valores para os quais a matriz e a aplicação T_θ são não invertíveis.

ii) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \kappa \\ \kappa \\ 2\kappa \end{bmatrix}$ conduz ao sistema $\begin{cases} x_1= & \kappa-x_3 \\ x_2= & \kappa-x_3 \\ x_3 & \textbf{Livre} \end{cases}$ ou seja $\begin{cases} x_1= & \kappa-t \\ x_2= & \kappa-t \\ x_3= & t \end{cases}$ em que t é um parâmetro real livre; a solução da equação é o conjunto dos elementos da forma $(\kappa-t,\kappa-t,t)$ em que t é um real arbitrário.

iii) A matriz de passagem é $P=\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{-\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Como se tem $P^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{-\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ pois a inversa de P é a sua transposta, uma vez que é ortogonal, basta calcular $P^{-1}A_0P=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 2 \end{bmatrix}$.