Instituto Superior Técnico 2003/2004 – 1º semestre

Álgebra Linear 1º ano da Licenciatura em Engenharia Informática

Exame Final (1ª época) **12/1/2004**

Nome do aluno: **Número do aluno:**

Turma: **Sala:**

Classificação da prova: **Rubrica do docente que corrigiu a prova:**

Observação: Responda às questões propostas sem apresentar os cálculos.

Advertência: há 8 enunciados parecidos... mas distintos.
Ler bem o enunciado, todas as questões estão bem explicadas
Se se enganou aproveite o espaço em branco na segunda página do exame e indique-o.
Não perturbe o raciocínio dos seus colegas chamando o vigilante, use o seu bom senso.
Não tente tirar dúvidas da matéria junto do vigilante do exame.
Se o seu **telemóvel** tocar dentro da sala, **onde quer que este esteja**, o seu exame será anulado.
Duração: 1h30 **Cotação:** 2 por questão.

1. Sejam $A_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 3\alpha \end{bmatrix}$ e $b_\beta = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 6\beta \end{bmatrix}$ duas matrizes com α e β dois parâmetros reais.

i) Para que valores de α e β é o sistema $A_\alpha x = b_\beta$ indeterminado?

R.: $\alpha =$ $\beta =$

ii) Para que valores de α pertence o vector $v = (y_1, y_2, y_3)$ (qualquer) à imagem da aplicação $T_\alpha : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $T_\alpha(x) = A_\alpha x$?

R.:

iii) Obtenha o núcleo de T_1. É a solução da equação $A_1 x = 0$, quando se faz $\alpha = 1$ na matriz A_α.

R.:

2.

i) Seja P_1 o conjunto dos polinómios de grau menor ou igual a 1. Obtenha a matriz A que representa a transformação linear $F(p(t)) = p'(t) + 3p(t)$, em que $p'(t)$ representa a derivada em ordem a t de $p(t)$. Considere a base canónica de P_1, o conjunto $\{1, t\}$, tanto no espaço de partida como no espaço de chegada (fonte e alvo).

R.: $A = \begin{bmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{bmatrix}$

ii) Obtenha a matriz B que representa a transformação F na base ordenada $\{1+t, 1-t\}$ de P_1, tanto no espaço de partida como no espaço de chegada (fonte e alvo).

R.: $B = \begin{bmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{bmatrix}$

iii) Resolva a equação diferencial em P_1: $p'(t) + 3p(t) = 1 - t$.

R.: $p(t) =$

(Vire a página por favor)

3. Seja $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ uma matriz real. O traço de A é $trA = a + d$, o determinante de A é $\det A = ad - bc$.

i) Determine as condições mais gerais possíveis a que a, b,c e d têm de obedecer para que a matriz A tenha um valor próprio com multiplicidade algébrica 2. Assinale com uma cruz a única resposta correcta.

R.: a) $\det A = 0$ ☐ b) $trA = 0$ ☐ c) $trA = 0$ e $\det A = 0$ ☐ d) $(trA)^2 - 4 \det A = 0$ ☐ e) $(a - d)^2 = 4bc$ ☐

f) A é simétrica ☐ g) $(ad)^2 - 4bc = 0$ ☐ h) Nenhum dos anteriores ☐

ii) Seja $F(x, y)$ uma forma quadrática, de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}$, com a expressão $\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & b \\ b & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = -3x^2 - 3y^2 + 2bxy$, quais as condições a que b tem de obedecer para esta função ser sempre negativa quando $(x, y) \neq (0, 0)$?

R.:

iii) Seja a matriz $B = \begin{bmatrix} -3 & b \\ b & -3 \end{bmatrix}$, com b real, obtenha os vectores próprios de B.

R.: $v_1 =$ $v_2 =$

iv) Seja a matriz $B = \begin{bmatrix} -3 & b \\ b & -3 \end{bmatrix}$, obtenha uma matriz ortogonal que diagonaliza B.

R.: $P = \begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix}$

****

Espaço em branco para continuar respostas, se for caso disso.