Instituto Superior Técnico 2002/2003 – 1º semestre

Álgebra Linear 1º ano Licenciaturas em Engenharias Civil, do Território e Naval

Exame Final (2ª época) **25/01/2003**

Nome do aluno: **Número do aluno:**

Turma: **Sala:**

Classificação da prova: **Rubrica do docente que corrigiu a prova:**

Advertência: há 8 enunciados parecidos... mas distintos.
Duração: 2h **Cotação:** 2 pontos por questão.

1.

Considere o espaço vectorial $\mathcal{V} = \mathrm{M}(2, \mathbb{R})$, sobre $\mathbb{R}$, das matrizes, $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, reais, quadradas de ordem dois e considere o sub-espaço $\mathcal{L}$ de $\mathcal{V}$ formado pelas que *são simétricas*.

i) Considere as matrizes $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, ambas em $\mathcal{L}$, e determine uma matriz A_3 de forma que o conjunto $\{A_1, A_2, A_3\}$ constitua uma base de $\mathcal{L}$

RESPOSTA: $A_3 = \begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix}$.

ii) Dada $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathrm{M}(2, \mathbb{R})$ define-se, o *traço* e o *determinante* de A, através de $\mathrm{tr}(A) = a + d$ e $\det(A) = ad - bc$; admitindo que A é simétrica e que portanto $b = c$, ou seja admitindo que A é da forma $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix}$ designe por $p_A(\mathrm{x}) = \mathrm{x}^2 + r\mathrm{x} + s$ o polinómio característico de A e calcule o seu discriminante, definido por $\Delta = r^2 - 4s$, em termos dos coeficientes de A, assinalando a sua resposta com ☒ (há-de ver que se tem $\Delta \geq 0$, podendo portanto concluir-se que os valores próprios de A são sempre reais).

RESPOSTA:
a) $\Delta = 0$ ☐ b) $\Delta = (a - d)^2 + 4b^2$ ☐ c) $\Delta = (a + d)^2 + 4b^2$ ☐ d) $\Delta = (a + d)^2 + b^2$ ☐
e) $\Delta = 1$ ☐ f) $\Delta = a^2 + b^2 + d^2$ ☐ g) $\Delta = (a + b + d)^2$ ☐

iii) Considere em $\mathcal{L}$ o produto interno que às matrizes simétricas A, B de $\mathcal{L}$ associa associa o número real

$$\langle A, B \rangle = \mathrm{tr}(AB) \quad ,$$

e dadas as matrizes $M_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ e $M_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, ambas em $\mathcal{L}$, determine uma matriz $M_3 \in \mathcal{L}$ de tal forma que $\mathcal{B} = \{M_1, M_2, M_3\}$ constitua uma base *ortogonal* de $\mathcal{L}$.

RESPOSTA: $M_3 = \begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix}$.

iv) Indique uma base $\mathcal{C} = \{N_1, N_2, N_3\}$ de $\mathcal{L}$ *ortonormada* para o produto interno considerado.

RESPOSTA: $N_1 = \begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix}$ $N_2 = \begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix}$ $N_3 = \begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix}$.

v) Considerando o produto interno atrás definido calcule então a correspondente distância δ entre a matriz $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e a matriz $J = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

RESPOSTA: $\delta =$

Vire a página para ver o resto do enunciado do seu exame.

2.

Considere o espaço vectorial $\mathcal{V} = \mathrm{M}(2,\mathbb{R})$, sobre $\mathbb{R}$, das matrizes, reais quadradas de ordem dois e considere a base $\mathcal{D} = \{D_1, D_2, D_3, D_4\}$ de $\mathcal{V}$, *ordenada conforme indicado,* sendo

$$D_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix};$$

seja $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ uma matriz fixada de $\mathcal{V}$ e considere o endomorfismo φ de $\mathcal{V}$ dado por $\varphi(X) = AX$.

i) Determine a matriz $M \in \mathrm{M}(4,\mathbb{R})$ de φ com relação à *base $\mathcal{D}$ ordenada* conforme indicado *(ATENÇÃO À ORDEM!!!!!).*

RESPOSTA:

. $$M = \begin{bmatrix} \quad & \quad & \quad & \quad \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{bmatrix}.$$

ii) Admitindo que λ é um *valor próprio* de A e que $v = (\alpha, \beta)$ é um *vector próprio* de A *associado* a λ, sendo α e β não nulos, diga quais das matrizes seguintes constituem vectores próprios de φ:

$U_1 = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}$, $U_2 = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ \beta & 0 \end{bmatrix}$, $U_3 = \begin{bmatrix} \alpha & \alpha \\ \beta & \beta \end{bmatrix}$, $U_4 = \begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ \beta & 0 \end{bmatrix}$, $U_5 = \begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & \beta \end{bmatrix}$, $U_6 = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix}$

RESPOSTA:

iii) Admitindo que λ_1, λ_2 são os valores próprios — distintos — de A, determine o conjunto P dos valores próprios de φ.

RESPOSTA: $P = \{ \qquad\qquad \}$.

iv) Sendo $v_1 = (a_1, b_1)$ e $v_2 = (a_2, b_2)$ vectores próprios de A associados respectivamente a λ_1 e a λ_2, e admitindo que eles são linearmente independentes, determine uma base própria $\mathcal{P} = \{V_1, V_2, V_3, V_4\}$, para o endomorfismo $\varphi : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$.

RESPOSTA:

$V_1 = \begin{bmatrix} \quad & \quad \\ & \end{bmatrix}$, $V_2 = \begin{bmatrix} \quad & \quad \\ & \end{bmatrix}$, $V_2 = \begin{bmatrix} \quad & \quad \\ & \end{bmatrix}$, $V_2 = \begin{bmatrix} \quad & \quad \\ & \end{bmatrix}$.

v) Admitindo que λ_1, λ_2, são os valores próprios de A diga *exactamente em que condições* (isto é, nessas e só nessas) o endomorfismo $\varphi : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ é diagonalizável em $\mathbb{R}$, assinalando *exactamente* a sua resposta com ☒ nas casas ☐ pertinentes.

RESPOSTA:

a) Se $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ☐ b) Nunca ☐ c) Sempre ☐ d) Se λ_1, λ_2 forem reais ☐
e) Se A o for ☐ f) Se λ_1, λ_2 forem reais e $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ☐ g) Se $\lambda_1 = \lambda_2$ ☐

Vire a página para ver o resto do enunciado do seu exame.