Instituto Superior Técnico 2002/2003 – 1º semestre

Álgebra Linear 1º ano Licenciaturas em Engenharias Civil, do Território e Naval

Exame Final (1ª época) **10/01/2003**

Nome do aluno: **Número do aluno:**

Turma: **Sala:**

Classificação da prova: **Rubrica do docente que corrigiu a prova:**

Advertência: há 8 enunciados parecidos... mas distintos.
Duração: 2h **Cotação:** 2 pontos por questão.

1.

Considere o espaço vectorial $\mathcal{V}$, sobre $\mathbb{R}$, dos polinómios $p(\mathrm{x})$, de grau inferior ou igual a 2, com coeficientes reais, na variável x e considere em $\mathcal{V}$ as duas bases $\mathcal{B} = \{1, \mathrm{x}, \mathrm{x}^2\}$ e $\mathcal{B}' = \left\{(1-\mathrm{x})^2, \mathrm{x}(1-\mathrm{x}), \mathrm{x}^2\right\}$ *ordenadas conforme indicado* e considere o subespaço $\mathcal{L}$ de $\mathcal{V}$ dado por

$$\mathcal{L} = \{p(\mathrm{x}) \in \mathcal{V} : \quad 2\,p(\mathrm{x}) = \mathrm{x}\,p'(\mathrm{x})\}$$

onde $p'(\mathrm{x}) = b + 2c\mathrm{x}$ é o polinómio *derivado* de $p(\mathrm{x}) = a + b\mathrm{x} + c\mathrm{x}^2$.

i) Assinale com ☒ qual dos conjuntos seguintes constitui uma base para o subespaço $\mathcal{L}$.
RESPOSTA:

a) $\{\mathrm{x}, 1-\mathrm{x}\}$ ☐ b) $\{\mathrm{x}^2\}$ ☐ c) $\{0\}$ ☐ d) $\mathcal{B}'$ ☐ e) $\{1, \mathrm{x}\}$ ☐ f) $\{1, \mathrm{x}, \mathrm{x}^2\}$ ☐

ii) Determine a matriz M de mudança de base que *faz passar de* $\mathcal{B}$ *a* $\mathcal{B}'$ — bases *ordenadas conforme indicado* — e a matriz N de mudança de base que *faz passar de* $\mathcal{B}'$ *a* $\mathcal{B}$.

RESPOSTA: $M = \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}$ e $N = \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}$

iii) Considere a aplicação linear $T : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ definida por $T(p(\mathrm{x})) = 2\,p(\mathrm{x}) - \mathrm{x}\,p'(\mathrm{x})$ e determine a dimensão m do seu núcleo e a dimensão n da sua imagem.
RESPOSTA: $m =$ e $n =$

iv) Determine a matriz A da aplicação linear T definida na alínea anterior, relativamente à base $\mathcal{B}$ ordenada conforme indicado.

RESPOSTA: $A = \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}$

v) Considere em $\mathcal{V}$ o produto interno que aos polinómios $p(\mathrm{x}) = a_0 + a_1\mathrm{x} + a_2\mathrm{x}^2$ e $q(\mathrm{x}) = b_0 + b_1\mathrm{x} + b_2\mathrm{x}^2$ associa o número real

$$\langle p(\mathrm{x}), q(\mathrm{x})\rangle = a_0b_0 + 2a_1b_1 + 3a_2b_2 \quad ;$$

calcule então a correspondente distância entre $p(\mathrm{x}) = 1$ e $q(\mathrm{x}) = \mathrm{x}$.

Vire a página para ver o resto do enunciado do seu exame.

2.

Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$

i) Determine uma matriz diagonal $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$ semelhante a A, onde $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$

RESPOSTA: $D = \begin{bmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{bmatrix}$

ii) Determine uma matriz invertível P tal que $D = P^{-1}.A.P$

RESPOSTA: $P = \begin{bmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{bmatrix}$

iii) Determine *todas* as funções $y_1(t)$ e $y_2(t)$ satisfazendo $\begin{bmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}$ i.e., abreviadamente, $y'(t) = D\,.\,y(t)$, onde a notação $f'(t)$ se refere à derivada da função $f(t)$.

SUGESTÃO: As funções deriváveis $f(u)$ satisfazendo $f'(u) = k\,f(u)$ são todas da forma ce^{ku}, onde k e c estão em $\mathbb{R}$.
RESPOSTA:

iv) Determine *todas* as funções $x_1(t)$ e $x_2(t)$ satisfazendo $\begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$ i.e., abreviadamente, $x'(t) = A\,.\,x(t)$.

SUGESTÃO: Faça $x(t) = P\,.\,y(t)$
RESPOSTA:

v) Determine os valores de duas grandezas $x_1(t)$ e $x_2(t)$ (dependentes do tempo t) no instante t, sabendo que se tem $x'(t) = A\,.\,x(t)$, onde A é a matriz dada anteriormente e sabendo que essas grandezas são conhecidas respectivamente nos instantes 0 e 1, tendo-se $x_1(0) = 1$ e $x_2(1) = 0$.
RESPOSTA:

$x_1(t) =$

$x_2(t) =$

Vire a página para ver o resto do enunciado do seu exame.