Instituto Superior Técnico 2001/2002 – 1º semestre

Álgebra Linear 1º ano Licenciaturas em Engenharias Civil e do Território

Exame Final (2ª época) **28/1/2002**

Nome do aluno: **Número do aluno:**

Turma: **Sala:**

Classificação da prova: **Rubrica do docente que corrigiu a prova:**

Advertência: há 8 enunciados parecidos... mas distintos.

Duração: 2h **Cotação:** 2 pontos por questão.

1. i) Considere o espaço vectorial $\mathcal{P}$ dos polinómios $p(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2$ com coeficientes reais. Para que valores de α são os vectores $v_1 = 1 + t^2$, $v_2 = 1 + t + t^2$, $v_3 = -1 + \alpha t^2$ de $\mathcal{P}$, linearmente dependentes?

RESPOSTA.: a) 0 ☐ b) 1 ☐ c) -1 ☐ d) 2 ☐ e) -2 ☐ f) 3 ☐

ii) Seja a aplicação linear T de $\mathcal{P}$ em $\mathcal{P}$, dada por $T(p(t)) = p'(t)$, onde $p'(t)$ é o polinómio derivado de $p(t)$. Para que valores de β pertence o vector $q(t) = 1 + \beta t^2$, à imagem $\operatorname{im}(T)$ da aplicação T?

RESPOSTA.: a) 3 ☐ b) -2 ☐ c) 2 ☐ d) 0 ☐ e) 1 ☐ f) -1 ☐

iii) Qual é a matriz A que representa a aplicação T, anterior, relativamente à base ordenada $(1, 1-t, 1+t^2)$, escolhida na fonte e no alvo?

RESPOSTA.: $A = \begin{bmatrix} \quad & \quad & \quad \\ & & \\ & & \end{bmatrix}$

2. i) Seja $B = \begin{bmatrix} 1 & \beta \\ \beta^{-1} & \beta^2 \end{bmatrix}$ uma *matriz real* associada à transformação linear T de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$ dada por $T(u) = Bu$, e em que β é *um número real* diferente de 0. Para que valores de β se tem $\dim(\ker(T)) = \dim(\operatorname{im}(T))$?

RESPOSTA.: a) 1 ☐ b) 1 ou -1 ☐ c) 2 ☐ d) -1 ☐ e) nenhum ☐ f) $\beta \in \mathbb{R}$ ☐

ii) Considere agora a matriz *complexa* $C = \begin{bmatrix} 1 & -\gamma \\ \gamma^{-1} & \gamma^2 \end{bmatrix}$ em que γ é *um número complexo* diferente de 0. Em que condições será C uma matriz invertível?

RESPOSTA.: a) $\gamma = 1$ ☐ b) γ qualquer ☐ c) $\gamma = 1$ ou $\gamma = -1$ ☐ d) C nunca é invertível ☐
e) $\gamma = \mathrm{i}$ ou $\gamma = -\mathrm{i}$ ☐ f) $\gamma = 1 + \mathrm{i}$ ou $\gamma = 1 - \mathrm{i}$ ☐

iii) Duas matrizes X, Y de $\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ dizem-se semelhantes se e só se existir uma matriz P invertível em $\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ tal que $Y = P^{-1}XP$; das matrizes seguintes há *duas* que são semelhantes; assinale-as.

RESPOSTA.: a) $\begin{bmatrix} \mathrm{i} & 1 \\ 1 & -\mathrm{i} \end{bmatrix}$ ☐ b) $\begin{bmatrix} 1+\mathrm{i} & 0 \\ 0 & 1-\mathrm{i} \end{bmatrix}$ ☐ c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ☐ d) $\begin{bmatrix} 1 & \mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & 1 \end{bmatrix}$ ☐
e) $\begin{bmatrix} 0 & \mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & 0 \end{bmatrix}$ ☐ f) $\begin{bmatrix} \mathrm{i} & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & -\mathrm{i} \end{bmatrix}$ ☐

3. i) Considere a matriz real simétrica $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$; calcule uma matriz ortogonal P que diagonaliza A, isto é tal $P^{-1} = P^t$ sendo $P^{-1}AP$ diagonal.

RESPOSTA.: $P = \begin{bmatrix} \quad & \quad \\ & \end{bmatrix}$

ii) Seja $p(u,v)$ um produto interno em $\mathbb{R}^2$, dado por $p(u,v) = u^t A v$ ou seja $p(u,v) = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$. Considere os vectores $u = \begin{bmatrix} 0 \\ \beta \end{bmatrix}$ e $v = \begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \end{bmatrix}$; obtenha uma condição necessária e suficiente relativamente a α e β para que u e v sejam ortogonais com respeito ao produto interno $p(u,v)$.

RESPOSTA.: a) $\alpha = 0$, β qualquer ☐ b) $\beta = 0$, α qualquer ☐ c) $\alpha = 0$ **ou** $\beta = 0$ ☐ d) $\alpha = 0$ **e** $\beta = 0$ ☐
e) u e v nunca são ortogonais ☐ f) u e v são sempre ortogonais ☐

iii) Obtenha uma base *ortogonal* a partir dos vectores $v_1 = (1,0)$ e $v_2 = (0,1)$ utilizando o método de Gram-Schmidt e o produto interno $p(u,v) = u^t A v$ já utilizado na alínea anterior.

RESPOSTA.: $u_1 = (\quad , \quad), u_2 = (\quad , \quad)$

4. Seja A uma matriz real simétrica $\begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix}$. Qual a condição necessária e suficiente para que os valores próprios sejam reais e distintos?

RESPOSTA.: a) $b^2 - 4ad > 0$ ☐ b) $a \neq 0$ e $ad - b^2 \neq 0$ ☐ c) $\operatorname{tr}(A) > 0$ e $\det(A) > 0$ ☐ d) $a \neq d$ ou $b \neq 0$ ☐
e) $a \neq 0$ e $b \neq 0$, $d \neq 0$ ☐ f) A é invertível.