Instituto Superior Técnico 2001/2002 – 1º semestre

Álgebra Linear 1º ano Licenciaturas em Engenharias Civil e do Território

Exame Final (1ª época) **14/1/2002**

Nome do aluno: **Número do aluno:**

Turma: **Sala:**

Classificação da prova: **Rubrica do docente que corrigiu a prova:**

Advertência: há 8 enunciados parecidos... mas distintos.

Duração: 2h **Cotação:** 2 pontos por questão.

1.

Considere o espaço vectorial $\mathcal{V}$ das matrizes reais de tipo 2×2; dada a matriz $A=\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$ considere o subespaço $\mathcal{L}$ de $\mathcal{V}$ dado por $\mathcal{L}=\{X\in\mathcal{V}: \quad AX=O\}$ onde O é a matriz nula de $\mathcal{V}$.

i) Calcule $\dim_{\mathbb{R}}\mathcal{L}$.

RESPOSTA: a) 0 ☐ b) 1 ☐ c) 2 ☐ d) ∞ ☐ e) 3 ☐ f) 4 ☐

ii) Indique duas matrizes constituindo uma base de $\mathcal{L}$ e determine nessa base as coordenadas de $B=\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}\in\mathcal{L}$.

RESPOSTA: Base de $\mathcal{L}$: Coordenadas de B:

iii) Considere a aplicação linear $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ dada por $T(x)=Ax$ e determine a matriz C de T *relativamente à base ordenada* $\mathcal{B}=((1,-2),(-2,1))$ tomada na fonte e no alvo de T.

RESPOSTA: $C=\begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}$

2.

Considere a matriz real $M_\alpha=\begin{bmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ como operador no espaço euclidiano canónico $\mathbb{R}^3$.

i) Sabendo que 3 é um valor próprio da matriz M_2 determine a dimensão do correspondente espaço próprio, $L\subset\mathbb{R}^3$.

RESPOSTA: a) 2 ☐ b) 1 ☐ c) 0 ☐ d) não tem ☐ e) 3 ☐ f) 4 ☐

ii) Calcule a distância de $v=(0,0,1)$ ao espaço próprio L, ou seja calcule o comprimento de $\mathrm{ort}_L v$:

RESPOSTA: a) $\sqrt{2}$ ☐ b) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ☐ c) 1 ☐ d) $1+\sqrt{2}$ ☐ e) 0 ☐ f) $\sqrt{2}-1$ ☐

iii) Diga, *justificando brevemente*, se a matriz M_2 é ou não diagonalizável no campo real.

RESPOSTA:

iv) Diga, *justificando brevemente*, se as matrizes M_2 e M_{-1} são ou não semelhantes.

RESPOSTA:

Sugestão: Calcule a dimensão d do espaço próprio do valor próprio 3 da matriz M_{-1}.

v) Para que valores de α é a matriz M_α invertível?

RESPOSTA: a) 2 ☐ b) $\alpha\in\mathbb{R}$ ☐ c) 0 ☐ d) -1 ☐ e) 3 ☐ f) nenhum ☐

3.

i) Calcular o determinante da matriz seguinte: $M=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^4+\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}^4$

RESPOSTA:

ii) Sendo V o espaço vectorial das funções $f(x)$ de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ diferenciáveis e sendo L o subespaço unidimensional $L=\{re^x: \ r\in\mathbb{R}\}$ determine os valores próprios da aplicação linear D de L em L que a f associa a sua derivada f'.

RESPOSTA: