Instituto Superior Técnico 2000/2001 – 1º semestre

Álgebra Linear 1º ano Licenciaturas em Engenharias Mecânica, Minas, Materiais e Naval

Exame Final (2ª época) **31/1/2001**

Nome do aluno: **Número do aluno:**

Turma: **Sala:**

Classificação da prova: **Rubrica do docente que corrigiu a prova:**

Advertência: há 6 enunciados parecidos... mas distintos.

Duração: 2h **Cotação:** 3 pontos por cada questão, salvo a questão **7)** que vale 2 pontos.

NOTA: Dê as suas respostas, <u>nos locais assinalados</u>, podendo, <u>se quiser</u>, apresentar aí, brevemente, um ou outro elemento que considere útil para obter essas respostas.

1) Determine todas as matrizes reais *não* invertíveis $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, com $a \neq 0$ e tais que o vector $v = (1, -1)$ seja um vector próprio da aplicação linear de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$ determinada por A, relativamente à base canónica.

Resposta.:

2) Determine os valores do parâmetro real k para os quais a matriz $M = \begin{bmatrix} 2 & k & 2k \\ 0 & -1 & k \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ é diagonalizável através de uma matriz de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$.

Resposta.:

3) Determine quais são os números reais h e k tais que a matriz $N = \begin{bmatrix} h & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ seja *não* invertível e *simultaneamente* admita o valor próprio $\lambda = 2$; diga além disso — *justificando brevemente* — se a matriz N é diagonalizável através de uma matriz *real* para os valores h e k anteriormente obtidos.

Resposta.:

4) No espaço euclidiano real $\mathcal{P}_2$ dos polinómios em t, de grau ≤ 2 e coeficientes reais, considere a aplicação linear D que a cada polinómio $f(t)$ associa o polinómio $f'(t)$ obtido por derivação, determine a matriz A de $D : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ e a matriz B de $D \circ D$ — esta composição de D com D será designada por D^2 — na base ordenada $(\ 1\ ,\ t\ ,\ t^2\ )$ e indique enfim um polinómio $p(t) = a + bt + ct^2$ em $\mathcal{P}_2$ que satisfaça a condição $(D^2 + D + 1) \bullet p(t) = 1 + 2t$, onde usámos a notação $(\alpha D^2 + \beta D + 1) \bullet p(t) = \alpha p''(t) + \beta p'(t) + p(t)$.

Resposta.:

5) No espaço vectorial real euclidiano $\mathbb{R}^4$ — munido do produto interno usual — considere os vectores $x_1 = (0, 0, -1, 0)$ e $x_2 = (-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}, 0)$; determine o ângulo $\measuredangle(x_1, x_2)$ entre esses vectores e obtenha um vector $y \in \mathbb{R}^4$ de modo que (x_0, x_1, y) seja uma base ordenada *ortogonal* do sub-espaço $W \subset \mathbb{R}^4$ gerado pelos três vectores, $x_0 = (0, 1, 0, 0)$ e x_1 e x_2.

Resposta.:

6) No espaço vectorial real euclidiano $\mathbb{R}^4$ — munido do produto interno usual — considere os vectores $v = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ que satisfazem as condições $2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 = 0$, $\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_4 = 0$, $\ 3x_1 + x_2 + 9x_3 - x_4 = 0$, indique um conjunto de geradores para o subespaço $L^{\perp}$, ortogonal de L e determine a sua dimensão.

Resposta.:

7) Considere o espaço vectorial real $\mathcal{P}_1$ dos polinómios $f(t)$ na variável t, de grau ≤ 1 e coeficientes reais, e considere a aplicação — $\mathbb{R}$-linear — que a qualquer $h(t) = a + bt$ em $\mathcal{P}_1$ associa o número $I(h(t)) = H(1) - H(0)$ sendo $H(t)$ um polinómio (de grau ≤ 2) associado a $h(t) = a + bt$ e definido por $H(t) = at + \frac{1}{2}bt^2$; considere agora a aplicação

$$\begin{gathered} \langle \ldots, \ldots \rangle : \mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_1 \to \mathbb{R} \\ (f(t), g(t)) \mapsto \langle f(t), g(t) \rangle = I(f(t) \,.\, g(t)) \end{gathered}$$

onde $f(t) \,.\, g(t)$ é o produto dos dois polinómios $f(t)$ e $g(t)$ e onde a aplicação $\langle \ldots, \ldots \rangle$ define um produto interno em $\mathcal{P}_1$ (facto que admitirá) o que faz de $\mathcal{P}_1$ um espaço euclidiano real.

A partir da base ordenada $(1, t)$ do sub-espaço V de $\mathcal{P}_1$ gerado por 1 e t obtenha uma base ortonormada $(u(t), v(t))$ de V relativamente ao produto interno atrás considerado.

Resposta.:

Classificação a preencher pelo docente que corrige a prova:

1	2	3	4	5	6	7

Total: