Instituto Superior Técnico 2000/2001 – 1º semestre

Álgebra Linear 1º ano Licenciaturas em Engenharias Mecânica, Minas, Materiais e Naval

Exame Final (1ª época) **15/1/2001**

Nome do aluno: **Número do aluno:**

Turma: **Sala:**

Classificação da prova: **Rubrica do docente que corrigiu a prova:**

Advertência: há 8 enunciados parecidos... mas distintos.
Duração: 2h **Cotação:** 1 ponto por questão.

1) Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ e determine:

a) todas as matrizes X tais que $AX = XA$.

b) $\dim_{\mathbb{R}} V$ onde $V = \{X \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R}) : \quad AX = O\}$.

c) $\dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{im}T)$ onde $T : X \mapsto AX - XA$, sendo $X \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$.

Resposta.: a) b) c)

2) No espaço euclidiano real $\mathbb{R}[t]$ dos polinómios em t, de grau ≤ 1 e coeficientes reais, munido do produto interno $\langle at+b, ct+d\rangle = ac + bd$, determine:

a) as coordenadas do polinómio $f(t) = \alpha t - 2$ na base ordenada $(\ t+1\ ,\ t-1\ )$.

b) os valores de α para os quais o vector anterior $f(t)$ e o vector $t + \alpha$ são ortogonais.

c) a matriz (na base canónica) da aplicação linear que a $p(t)$ associa a sua projecção ortogonal sobre $g(t) = t + 1$.

Resposta.: a) b) c)

3) Considere o sub-espaço vectorial V de $\mathbb{C}^3$ gerado pelos vectores $v_1 = (1, 1, \mathrm{i})$, $v_2 = (1, \mathrm{i}, 2\mathrm{i} + 1)$ e $v_3 = (1, -1, 3\mathrm{i})$ (sendo i a unidade imaginária, i.e. $\mathrm{i} = (0, 1)$ e portanto $\mathrm{i}^2 = -1$) e determine:

a) $\dim_{\mathbb{C}} V$.

b) uma base de V.

c) $\det M$ onde M é a matriz cujas linhas são as componentes de v_1, v_2, v_3.

Resposta.: a) b) c)

4) Considere a aplicação linear $\varphi : \mathrm{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ que à matriz $A = [a_{ij}]$ associa o seu traço $\mathrm{tr}(A) = a_{11} + a_{22}$ e determine:

a) uma relação entre $\mathrm{tr}(AB)$ e $\mathrm{tr}(BA)$ onde $A = [a_{ij}]$ e $B = [b_{ij}]$ estão em $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$.

b) qual a relação entre os coeficientes α, β, γ do polinómio $\det(A - \lambda I) = \alpha\lambda^2 + \beta\lambda + \gamma$ e os números $\mathrm{tr}(A)$ e $\det(A)$.

c) uma condição (necessária e suficiente) que $\mathrm{tr}(A)$ terá de verificar se A tiver dois valores próprios iguais.

Resposta.: a) b) c)

5) Como sabe duas matrizes X, Y de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ dizem-se semelhantes se e só se existir uma matriz P invertível em $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ tal que $Y = P^{-1}XP$; considere as as matrizes $\begin{bmatrix} 1 & \beta \\ 1 & \alpha \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} \beta & 1 \\ 1 & \alpha \end{bmatrix}$ e determine:

a) os valores de α e β em $\mathbb{R}$ para os quais as matrizes sejam semelhantes.

b) os valores de α e β em $\mathbb{R}$ de modo que a *primeira* matriz seja diagonalizável através de uma matriz ortogonalde $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$.

c) as multiplicidades algébricas $\mu_a(\lambda)$ e geométricas $\mu_g(\lambda)$ dos valores próprios λ de $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Resposta.: a) b) c)

(continua no reverso desta folha)

6) Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ e determine:

a) uma matriz diagonal $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$ a ela semelhante onde $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.

b) uma matriz invertível P tal que $D = P^{-1}AP$.

c) todas as funções $y_1(t)$ e $y_2(t)$ satisfazendo $\begin{bmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}$ i.e., abreviadamente, $y'(t) = D\,y(t)$.

Sugestão: As funções deriváveis $f(u)$ satisfazendo $f'(u) = k\,f(u)$ são todas da forma ce^{ku}, onde k e c estão em $\mathbb{R}$.

d) todas as funções $x_1(t)$ e $x_2(t)$ satisfazendo $\begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$ i.e., abreviadamente, $x'(t) = A\,x(t)$.

Sugestão: Faça $x(t) = P\;y(t)$.

e) os valores de duas grandezas $x_1(t)$ e $x_2(t)$ (dependentes do tempo t) num instante "futuro" $t_0 > 0$, sabendo que se tem $x'(t) = A\,x(t)$ e que essas grandezas são conhecidas no instante "presente" $t = 0$, tendo-se por exemplo, $x_1(0) = 1$ e $x_2(0) = 2$.

Resposta.: a) b)

c) d)

****

Classificação a preencher pelo docente que corrige a prova:

1a **1b** **1c** **2a** **2b** **2c** **3a** **3b** **3c**

4a **4b** **4c** **5a** **5b** **5c**

6a **6b** **6c** **6d** **6e**

Total: