

Nome do aluno:

Número do aluno:

Turma: Sala:

Classificação da prova:

Rubrica do docente que corrigiu a prova:

Observação: em cada questão assinale com as casas convenientes e **só essas**.

Advertência: há 8 enunciados parecidos... mas distintos.

Duração: 2h **Cotação:** 1,5 por questão, salvo as duas últimas que valem 1 ponto cada.

1.

i) Seja S o sub-espaço de \mathbb{R}^3 gerado pelos três vectores $v_1 = (1, 2, 2)$, $v_2 = (-1, 1, 1)$, $v_3 = (1, 0, 0)$ e seja $u = (1, 1, \beta)$ onde $\beta \in \mathbb{R}$; indique a dimensão α de S e o valor ou valores de β de forma que $u \in S$.

RESPOSTA: a) $\alpha = 2$ e $\beta = 1$ b) $\alpha = 2$ e $\beta = 0$ c) $\alpha \neq 0$ e $\beta = 3$
d) $\alpha = 3$ e β é qualquer elemento de \mathbb{R} e) $\alpha = 2$ e β é qualquer elemento de \mathbb{R} f) $\alpha = 2$ e $\beta \neq 0$

ii) Considere em \mathbb{R}^3 o produto interno euclidiano usual, o sub-espaço S da questão anterior e os cinco vectores $v_1 = (1, 2, 2)$, $v_2 = (-1, 1, 1)$, $v_3 = (1, 0, 0)$, $v_4 = (1, -1, 0)$, $v_5 = (0, 1, 1)$ e diga qual dos seguintes conjuntos constitui uma base ortonormada para S .

RESPOSTA: a) $\{\frac{1}{\sqrt{3}}v_1, v_2, v_3\}$ b) $\{v_3, v_5\}$ c) $\{v_3, v_4\}$ d) $\{v_3, \frac{1}{\sqrt{2}}v_5\}$
e) $\{\frac{1}{\sqrt{2}}v_1, v_3\}$ f) $\{v_3, \frac{1}{\sqrt{2}}v_4\}$

iii) Considere em \mathbb{R}^3 o produto interno euclidiano usual e o sub-espaço S da primeira questão, bem como o seu complemento ortogonal S^\perp e diga qual das seguintes asserções é verdadeira:

RESPOSTA: a) $S^\perp = \ll (1, 0, 1), (0, -1, 1) \gg$ b) $S^\perp = \ll (1, 0, 2) \gg$ c) $S^\perp = \emptyset$
d) $S^\perp = \ll (0, -1, 1) \gg$ e) $S^\perp = \ll (1, 0, 1) \gg$ f) $S^\perp = \{0\}$

iv) Considere a aplicação linear $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $T(x) = \text{pr}_S x$ onde $\text{pr}_S : \mathbb{R}^3 \rightarrow S$ é a projecção ortogonal sobre o sub-espaço da primeira questão e diga qual é a matriz M que representa T na base canónica de \mathbb{R}^3 :

RESPOSTA.: a) $M = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ b) $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$ c) $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$
d) $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ e) $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$ f) $M = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1 \end{bmatrix}$

v) Sendo S o sub-espaço da primeira questão diga qual é a distância de $(0, 0, 1)$ a S :

RESPOSTA.: a) $\sqrt{2}$ b) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ c) 1 d) $1 + \sqrt{2}$ e) 0 f) $\sqrt{2} - 1$

vi) Sendo M a matriz seleccionada na questão iv) existe uma matriz P tal que $P^t M P$ é diagonal; diga qual das matrizes seguintes é a matriz P :

RESPOSTA.: a) $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
d) $\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ f) $\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 \end{bmatrix}$

2.

i) Quais os números complexos u e v que satisfazem ao sistema seguinte: $\begin{cases} iu + 2v = 2 \\ (1 - i)u + iv = 3 - i \end{cases}$

RESP.: a) $u = 1$ e $v = 1 + i$ b) $u = i - 1$ e $v = 1 + i$ c) $u = i + 1$ e $v = 1 + i$
d) $u = 2$ e $v = 1 - i$ e) $u = 2 - i$ e $v = 1$ f) $u = i$ e $v = 1 - i$

ii) Determine um valor de $\lambda \in \mathbb{C}$ de tal forma que os vectores $v_1 = (\lambda, 2, i)$, $v_2 = (0, 0, 1)$, $v_3 = (i, 2i, -1)$ em \mathbb{C}^3 sejam linearmente dependentes.

RESP.: a) $\lambda = -1$ b) $\lambda = -i$ c) $\lambda = 0$ d) $\lambda = 1$ e) $\lambda = 2$ f) $\lambda = i$

iii) Considere as aplicações lineares de \mathbb{R}^3 em \mathbb{R} dadas por $\alpha_1(x_1, x_2, x_3) = x_1 - 2x_2 + x_3$ e $\alpha_2(x_1, x_2, x_3) = 2x_1 + x_3$ e sejam U_1 e U_2 os respectivos núcleos; calcule as dimensões n de $U_1 \cap U_2$ e m de $U_1 + U_2$.

RESP.: a) $n = 1$ e $m = 3$ b) $n = 2$ e $m = 1$ c) $n = 1$ e $m = 1$
d) $n = 3$ e $m = 0$ e) $n = 0$ e $m = 3$ f) $n = 2$ e $m = 2$

iv) Considere o espaço vectorial \mathcal{P} dos polinómios $p(x) = a_0 + a_1x$ com coeficientes reais e a aplicação linear T de \mathcal{P} em \mathcal{P} que transforma $p_1(x) = 1$ em $q_1(x) = -5 - 9x$ e transforma $p_2(x) = x$ em $q_2(x) = 4 + 7x$, isto é $T(p_1(x)) = q_1(x)$ e $T(p_2(x)) = q_2(x)$; determine o conjunto V dos polinómios $p(x)$ de \mathcal{P} que são pontos fixos de T , isto é, tais que $T(p(x)) = p(x)$.

RESP.: a) $V = \llcorner 3 + 2x \lrcorner$ b) $V = \llcorner -3 + 2x, x \lrcorner$ c) $V = \llcorner -3 + 2x \lrcorner$
d) $V = \llcorner 3 - 3x \lrcorner$ e) $V = \llcorner 2 + 3x, -x \lrcorner$ f) $V = \llcorner 2 + 3x \lrcorner$

v) Sendo T a aplicação linear de \mathcal{P} em \mathcal{P} da questão anterior diga qual das seguintes asserções é correcta:

RESP.: a) A matriz de T na base $\{1 + x, 1 - x\}$ é diagonalizável b) Na base $\{-3 + 2x, x\}$ a matriz de T é diagonal c) Numa base adequada a matriz de T é $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ d) T não é diagonalizável
e) $\{x, -3 + 2x\}$ é uma base própria de T . f) $\{-3 + 2x\}$ é uma base própria de T .

vi) Sabendo que a matriz $A = \begin{bmatrix} 16 & -21 \\ 10 & -13 \end{bmatrix}$ satisfaz $A = PDP^{-1}$ onde $P = \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ e D é diagonal calcule A^4 .

RESP.: a) $\begin{bmatrix} 226 & -315 \\ 150 & -209 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 226 & -315 \\ -209 & 90 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} -209 & -315 \\ 90 & 226 \end{bmatrix}$
d) $\begin{bmatrix} -209 & -315 \\ 90 & 226 \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} 226 & 150 \\ -315 & -209 \end{bmatrix}$ f) $\begin{bmatrix} 226 & 90 \\ -209 & -315 \end{bmatrix}$

vii) Considere duas funções $x_1(t)$ e $x_2(t)$ de variável t , compondo a matriz coluna $x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$, e com derivadas

$x'_1(t)$ e $x'_2(t)$, satisfazendo o sistema $\begin{cases} x'_1(t) = 16x_1(t) - 21x_2(t) \\ x'_2(t) = 10x_1(t) - 13x_2(t) \end{cases}$, ou seja $x'(t) = A.x(t)$ (onde A é como em vi))

e através de uma mudança de funções $x(t) = P.y(t)$ (onde P é como em vi) e $y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}$) obtenha um novo sistema relativo a $y(t)$ cujas soluções gerais são:

RESP.: a) $y_1(t) = k_1(\cos t)e^t$ e $y_2(t) = k_2(\sin t)e^{2t}$ b) $y_1(t) = k_1(1 + t)e^{2t}$ e $y_2(t) = k_2e^{2t}$
c) $y_1(t) = k_1e^{2t}$ e $y_2(t) = (1 + t^2)k_2e^{2t}$ d) $y_1(t) = k_1(\cos t)e^{2t}$ e $y_2(t) = k_2(\sin t)e^t$
e) $y_1(t) = k_1e^t$ e $y_2(t) = k_2e^{2t}$ f) $y_1(t) = k_1te^{2t}$ e $y_2(t) = k_2e^t$

viii) O sistema $x'(t) = A.x(t)$ da questão anterior tem como soluções gerais:

RESP.: a) $x_1(t) = 7k_1(\cos t)e^t + 5k_2e^{2t}$ e $x_2(t) = 3k_1e^t + 2k_2e^{2t}$
b) $x_1(t) = 7k_1e^t + 5k_2e^{2t}$ e $x_2(t) = 3k_1e^t + 2k_2e^{2t}$
c) $x_1(t) = 7k_1e^t + 5k_2(\sin t)e^{2t}$ e $x_2(t) = 3k_1e^t + 2k_2e^{2t}$ d) $x_1(t) = 7k_1e^t$ e $x_2(t) = 2k_2e^{2t}$
e) $x_1(t) = 5k_1e^{2t}$ e $x_2(t) = 3k_2e^t$ f) $x_1(t) = 7k_1te^t$ e $x_2(t) = 3k_2e^t$

Classificação a preencher pelo docente que corrige a prova:

1i 1ii 1iii 1iv 1v 1vi
2i 2ii 2iii 2iv 2v 2vi 2vii 2viii

Total: