Instituto Superior Técnico 2004/2005 – 1º semestre

Álgebra Linear 1º ano da Licenciatura em Engenharia Informática

Exame Final (2ª época) **25/1/2005**

Nome do aluno: **Número do aluno:**

Turma: **Sala:**

Classificação da prova: **Rubrica do docente que corrigiu a prova:**

Observação:

Responda às questões propostas sem apresentar necessariamente os cálculos.

Advertência: há 8 enunciados parecidos... mas distintos.

Duração: 2h **Cotação:** 2 pontos por questão.

1. Considere o espaço vectorial V formado pelos polinómios $f(\mathrm{x}) = a_0 + a_1\mathrm{x} + a_2\,\mathrm{x}^2 + a_3\,\mathrm{x}^3$ na variável x com coeficientes em $\mathbb{R}$, definindo-se a soma de polinómios e o produto de um número real por um polinómio como usualmente; considere a aplicação $\mathbb{R}$-linear $T : V \to V$ dada por

$$T(f(\mathrm{x})) = (1-\mathrm{x}^2)\,f''(\mathrm{x}) + \mathrm{x}\,f'(\mathrm{x})$$

onde $f'(\mathrm{x})$ e $f''(\mathrm{x})$ designam respectivamente a primeira e a segunda derivada do polinómio $f(\mathrm{x})$.

i) Determine a matriz A de T com relação à base ordenada — ou referencial — dada por $1,\mathrm{x},\mathrm{x}^2,\mathrm{x}^3$ (nesta ordem).

Resposta:

$$A = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \\ \end{bmatrix}$$

ii) Calcule o determinante de T e de $T^5 = T \circ T \circ T \circ T \circ T$, onde o símbolo $\circ$ designa composição.

Resposta:

$\det(T) =$ $\det(T^5) =$

iii) Determine uma base para o núcleo $\ker(T)$.

Resposta:

iv) Mostre que 0 é um valor próprio de T e determine uma base para o espaço próprio $E_T(0)$ de T associado a 0.

Resposta:

v) Sabendo que o polinómio característico $p_T(\lambda)$ de T é da forma $p_T(\lambda) = \lambda^2\,g(\lambda)$, diga, *justificando cuidadosamente a resposta*, se é possível encontrar uma base ordenada de V com relação à qual a matriz de T seja diagonal.

Sugestão: *Use o resultado da alínea anterior.*

Resposta:

(Vire a página por favor)

2. Considere a matriz $A_a = \begin{bmatrix} 2 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & 2 \end{bmatrix}$ onde a é um parâmetro real e a partir dela defina o seguinte polinómio $q(\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z})$ nas variáveis X,Y e Z:

$$q(\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z}) = \begin{bmatrix} \mathrm{X} & \mathrm{Y} & \mathrm{Z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{X} \\ \mathrm{Y} \\ \mathrm{Z} \end{bmatrix} = 2\mathrm{X}^2 + \mathrm{Y}^2 + 2\mathrm{Z}^2 + 2a\mathrm{XZ}$$

i) Determine uma matriz B_a tal que $B_a = P^t A_a P$ onde P é uma matriz ortogonal $P \in \mathrm{M}(3, \mathbb{R})$ — i.e. tal que $P^t = P^{-1}$ — que *não necessita especificar.*

NOTA: *Observe que 1 é um valor próprio de A_a.*

RESPOSTA:

$$B_a = \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}$$

ii) Sendo P uma matriz como a que se refere na alínea anterior defina as variáveis X′,Y′ e Z′ através de $\begin{bmatrix} \mathrm{X} \\ \mathrm{Y} \\ \mathrm{Z} \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} \mathrm{X}' \\ \mathrm{Y}' \\ \mathrm{Z}' \end{bmatrix}$ e verificando que $q(\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z}) = \begin{bmatrix} \mathrm{X}' & \mathrm{Y}' & \mathrm{Z}' \end{bmatrix} B_a \begin{bmatrix} \mathrm{X}' \\ \mathrm{Y}' \\ \mathrm{Z}' \end{bmatrix}$, use este facto para determinar para que valores de $a \in \mathbb{R}$ o valor $q(u)$ do polinómio $q(\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z})$ em qualquer $u = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}$ é sempre ≥ 0.

RESPOSTA:

iii) *Existirá alguma matriz* $Q \in \mathrm{M}(3, \mathbb{R})$ tal que para algum $a \in \mathbb{R}$ se tenha $Q^{-1} A_a Q = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$ com $\lambda \in \mathbb{R}$? *Justifique a resposta.*

RESPOSTA:

iv) *Determine uma matriz* $R \in \mathrm{M}(3, \mathbb{R})$ tal que para algum valor possível α, de a — valor que indicará — se tenha $R^{-1} A_a R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$.

RESPOSTA:

α :

$$R = \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}$$

v) Considerando em $\mathbb{R}^3$ o produto interno usual dado por $\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$ e considerando um valor α indicado atrás, determine um referencial *ortonormado* tal que a matriz M da aplicação linear $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $\varphi(x) = A_\alpha \, . \, x$ seja $M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$.

NOTA: $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ identificou-se com $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$.

RESPOSTA: