Instituto Superior Técnico 2004/2005 – 1º semestre

Álgebra Linear 1º ano da Licenciatura em Engenharia Informática

Exame Final (1ª época) **11/1/2005 ..**

Nome do aluno: **Número do aluno:**

Turma: **Sala:**

Classificação da prova: **Rubrica do docente que corrigiu a prova:**

Observação:

Responda às questões propostas sem apresentar os cálculos.

Advertência: há 8 enunciados parecidos... mas distintos.

Duração: 2h **Cotação:** 2 pontos por questão.

1. Seja $A_\alpha = \begin{bmatrix} -1 & \alpha+2 \\ \alpha+2 & -1 \end{bmatrix}$ uma matriz em que α é um parâmetro real.

i) Determine α de modo que A_α tenha apenas um valor próprio com multiplicidade algébrica 2.

RESPOSTA:

ii) Determine uma matriz real P ortogonal — i.e tal que $P^{-1} = P^t$ — que diagonaliza a matriz A_α, para todo o real α, ou seja tal que $P^{-1}A_\alpha P$ seja uma matriz real diagonal D que determinará.

R.: $P = \begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix}$ $D = \begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix}$

iii) Sejam $x_1(t)$ e $x_2(t)$ duas funções reais da variável real $t \in \mathbb{R}$ e com derivadas $x_1'(t)$ e $x_2'(t)$ em $\mathbb{R}$, tais que se tenha $\begin{cases} x_1'(t) = -x_1(t) + (\alpha+2)\,x_2(t) \\ x_2'(t) = (\alpha+2)\,x_1(t) - x_2(t) \end{cases}$ ou seja, escrevendo matricialmente, $x'(t) = A_\alpha\, x(t)$ onde $x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$; definindo $y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}$ através de $x(t) = R\ y(t)$ onde R diagonaliza a matriz A_α, obtenha uma matriz diagonal $B \in \mathrm{M}(2, \mathbb{R})$, dependente do parâmetro α, tal que a relação $y'(t) = B\,y(t)$ seja verificada e obtenha todas as funções $y_1(t)$, $y_2(t)$ que satisfaçam essa relação.

OBSERVAÇÕES:

1) Note que a matriz R não tem que ser necessariamente ortogonal e que $R^{-1}A_\alpha R = B$.

2) Note que as soluções $f(t)$ da equação $f'(t) = \beta\, f(t)$ — onde $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função derivável e β é uma constante real — são todas da forma $f(t) = e^{\beta t}k$ com $k \in \mathbb{R}$.

R.:

iv) Obtenha todas as funções $x_1(t)$, $x_2(t)$ de tal forma que $x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$ satisfaça a relação $x'(t) = A_\alpha\, x(t)$.

R.:

v) Determine as únicas funções $x_1(t)$, $x_2(t)$ de tal forma que $x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$ satisfaça a relação $x'(t) = A_\alpha\, x(t)$ e além disso se tenha $\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

R.:

(Vire a página por favor)

2. Considere o espaço euclidiano $\mathbb{R}^3$, com o produto interno usual $\langle \ldots, \ldots \rangle$, considere o subespaço vectorial L gerado por $u = (-1, 0, 1)$ e considere o vector $a = (-1, 0, \gamma)$, onde γ é um parâmetro real *não nulo*.

i) Considere a aplicação $\mathbb{R}$-linear $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, dada por $\varphi(x) = \langle x, u \rangle$ e calcule a dimensão do núcleo $\ker(\varphi)$.

R.:

$\dim_{\mathbb{R}} \ker(\varphi) =$

ii) Determine uma base *ortogonal* $\{v_1, v_2\}$ para o subespaço vectorial $L^{\perp}$ definido por $L^{\perp} = \{x \in \mathbb{R}^3 : \quad \langle x, u \rangle = 0\}$, chamado o complemento ortogonal de L.

R.:

iii) Calcule o vector $\mathrm{pr}_{L^{\perp}} a = \mathrm{pr}_{v_1} a + \mathrm{pr}_{v_2} a$, projecção de a sobre o complemento ortogonal de L.

R.:

$\mathrm{pr}_{L^{\perp}} a =$

iv) Convenhamos chamar *distância* entre um vector $a \in \mathbb{R}^3$ e um subespaço vectorial S de $\mathbb{R}^3$ ao comprimento $d(a, S)$ do vector $\mathrm{pr}_{S^{\perp}} a$ (projecção de a sobre $S^{\perp}$); calcule então a distância $d(a, L)$ entre a e L bem como a distância $d(a, L^{\perp})$ entre a e $L^{\perp}$, complemento ortogonal de L, quando $a = (1, 0, \gamma)$.

R.:

$d(a, L) =$

v) Seja T uma transformação de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}^3$ dada por

$$T(x, y, z) = (-x + y - z\ ,\ -x - y - z\ ,\ x + z)\ ;$$

determine uma base ortogonal para o núcleo da transformação, $\ker(T)$, e uma base ortogonal para o complemento ortogonal, $(\ker(T))^{\perp}$, desse núcleo.

R.:

Base de $\ker(T)$:

Base de $(\ker(T))^{\perp}$: