Instituto Superior Técnico 2003/2004 – 1º semestre

Álgebra Linear 1º ano da Licenciatura em Engenharia Informática

Exame Final (2ª época) **26/1/2004**

Nome do aluno: **Número do aluno:**

Turma: **Sala:**

Classificação da prova: **Rubrica do docente que corrigiu a prova:**

Observação: Responda às questões propostas sem apresentar os cálculos

Advertência: há 8 enunciados parecidos... mas distintos.

Duração: 2h00 **Cotação:** 2 por questão.

1. Seja $A_\alpha = \begin{bmatrix} \alpha+2 & \alpha-2 & 0 \\ \alpha-2 & \alpha+2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ uma matriz em que α é um parâmetro real *diferente de* 2. Um dos valores próprios de A_α é $\lambda_1 = 4$; calcule *todos* os valores próprios de A_α e indique as multiplicidades algébricas $\mu_a(\lambda_j)$ de *cada um deles* (incluindo o valor próprio 4).

i) R.:

ii) Obtenha os espaços próprios $E(\lambda_j)$ da matriz A_α associados a cada um dos valores próprios λ_j e indique a multiplicidade geométrica $\mu_g(\lambda_j)$ de cada um destes espaços próprios; finalmente indique uma matriz ortogonal P que diagonaliza a matriz A_α.

R.:

iii) Obtenha a expressão geral das funções $x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$ satisfazendo a condição $x'(t) = A_\alpha \,.\, x(t)$, em que $x'(t) = \begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ x_3'(t) \end{bmatrix}$ é a derivada em ordem a t de $x(t)$

Obs.: $x'(t)$ define-se portanto à custa das derivadas $x_i'(t)$ das funções $x_i(t)$ (funções reais da variável real t).

R.:

2. Considere a função bilinear $g_{\beta,\gamma}$ de $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}$ dada por $g_{\beta,\gamma}\left(\,(x_1,x_2)\,,(y_1,y_2)\,\right) = 2x_1y_1 + 2x_2y_2 + \beta x_1y_2 + \gamma x_2y_1$.

i) Quais as condições que β e γ, parâmetros reais, devem verificar para que $g_{\beta,\gamma}$ satisfaça as propriedades de simetria e positividade que fazem desta função um produto interno?

R.:

ii) Utilizando em $\mathbb{R}^2$ o produto interno $\langle \ldots, \ldots \rangle$ dado pela função $g_{1,1}$ (em que se fez $\beta = 1$ e $\gamma = 1$ na função $g_{\beta,\gamma}$) e sendo L o subespaço linear de $\mathbb{R}^2$ gerado pelo vector $(1,b)$, em que b é um número real e $b \neq -2$, obtenha uma base para o complemento ortogonal $L^\perp = \{x \in \mathbb{R}^2 : \text{ para todo } y \in L \text{ tem-se } \langle x,y\rangle = 0\}$.

R.:

iii) Utilizando o produto interno da alínea anterior determine o ângulo formado pelos vectores (b,b) e $(-b,b)$ de $\mathbb{R}^2$ em que b é um número real diferente de zero.

R.:

iv) *Utilizando o produto interno das alíneas anteriores* construa uma base ortonormada de $\mathbb{R}^2$ a partir do conjunto $\{(1,0)\,,(0,1)\}$.

R.:

(Vire a página por favor)

3. Seja $A_\theta = \begin{bmatrix} \theta & 1 & 1 \\ 1 & \theta & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ uma matriz real representando, na base canónica de $\mathbb{R}^3$, uma transformação linear T_θ de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}^3$.

i) Determine os valores de θ que tornam a aplicação T_θ não invertível.

R.:

ii) Sendo κ um parâmetro real, diga qual é o conjunto que é transformado, por aplicação de T_0, em $\begin{bmatrix} \kappa \\ \kappa \\ 2\kappa \end{bmatrix}$, ou seja resolva o sistema linear

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \kappa \\ \kappa \\ 2\kappa \end{bmatrix}.$$

R.:

iii) Qual a matriz que representa a transformação T_0 relativamente à base *ordenada*

$$\left((\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0) \ , \ (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0) \ , \ (0, 0, 1) \right)$$

de $\mathbb{R}^3$, utilizada tanto no espaço de partida como no espaço de chegada (fonte e alvo).

R.:

****

Espaço em branco para continuar respostas, se for caso disso.