Instituto Superior Técnico 1999/2000 – 1º semestre

Álgebra Linear 1º ano da Licenciatura em Engenharia Informática

Exame Final (1ª época) **24/1/2000**

Nome do aluno: **Número do aluno:**

Turma: **Sala:**

Classificação da prova: **Rubrica do docente que corrigiu a prova:**

Observação: em cada questão assinale com ☒ as casas convenientes ***e só essas.***

Advertência: há 10 enunciados parecidos... mas distintos.

Duração: 2h **Cotação:** 1,5 por questão, salvo a última que vale 2 pontos.

1.

i) Para que valores de α são os vectores $v_1 = (1,1,2)$, $v_2 = (2,1,3)$, $v_3 = (1,0,\alpha)$ de $\mathbb{R}^3$ linearmente dependentes?

Resposta.: a) 0 ☐ b) 1 ☐ c) -1 ☐ d) 2 ☐ e) -2 ☐ f) 3 ☐

ii) Para que valores de β pertence o vector $v = (0,\beta,2)$, à imagem da aplicação $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $T(x) = Ax$, onde A é a matriz cujas 1^a, 2^ae 3^a *colunas* têm respectivamente por componentes as coordenadas de $v_1 = (1,1,2)$, $v_2 = (2,1,3)$ e $w = (1,0,1)$?

Resposta.: a) 3 ☐ b) -2 ☐ c) 2 ☐ d) 0 ☐ e) 1 ☐ f) -1 ☐

iii) Sendo a matriz A a anterior qual é o "plano" $P = x_0 + L$ que é o conjunto das soluções da equação $T(x) = (0,2,2)$?

Resposta.: a) $x_0 = (0,0,0)$, $L = \ll (1,-1,1) \gg$ ☐ b) $x_0 = (0,0,0)$, $L = \ll (-1,-1,1),(0,1,1) \gg$ ☐
c) $x_0 = (-2,2,0)$, $L = \ll (-1,-1,1),(0,1,1) \gg$ ☐ d) $x_0 = (4,-2,0)$, $L = \ll (1,-1,1) \gg$ ☐

iv) Sendo $P = x_0 + L$ como determinou atrás qual é a distância do ponto $a = (4,-1,0)$ ao "plano" $Q = x_0 + L^\perp$?

Resposta.: a) 1 ☐ b) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ☐ c) $\sqrt{3}$ ☐ d) 2 ☐ e) 0 ☐ f) 4 ☐

2.

i) Como sabe, dada uma matriz $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ real ou complexa o seu traço e o seu determinante são dados respectivamente por $\mathrm{tr}(A) = a + d$ e $\det(A) = ad - bc$; um dos seguintes polinómios é o polinómio característico $p_A(\lambda)$ de A; diga qual:

Resposta.: a) $\mathrm{tr}(A) + \det(A)\lambda + \lambda^2$ ☐ b) $\mathrm{tr}(A) - \det(A)\lambda + \lambda^2$ ☐ c) $1 + \det(A)\lambda + \mathrm{tr}(A)\lambda^2$ ☐
d) $\mathrm{tr}(A) - \det(A)\lambda - \lambda^2$ ☐ e) $\det(A) - \lambda\mathrm{tr}(A) + \lambda^2$ ☐ f) 0 ☐

ii) Haverá algum valor $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que a matriz complexa A em que $a = 1 + \mathrm{i}$, $b = 1 - \lambda\mathrm{i}$, $c = 2 - \mathrm{i}$, $d = 1 - \mathrm{i}$ não seja uma matriz invertível?

Resposta.: a) $\lambda = 1$ ☐ b) $\lambda = -\mathrm{i}$ ☐ c) não existe $\lambda \in \mathbb{R}$ nessas condições ☐ d) $\lambda = 0$ ☐ e) $\lambda = -1$ ☐ f) $\lambda = \sqrt{2}$ ☐

iii) Uma aplicação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é representada em certa base ordenada por uma matriz A e noutra base ordenada por uma matriz A'; *duas* das seguintes relações terão de ser necessariamente verificadas; quais são?

Resposta.: a) $AA' = I$ ☐ b) $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(A')$ ☐ c) $\det(A) = \det(A')$ ☐ d) $\det(A') = \det(A^{-1})$ ☐
e) $\mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(A') = 0$ ☐ f) $\mathrm{tr}(AA') = \mathrm{tr}(A)\mathrm{tr}(A')$ ☐

iv) Duas matrizes X, Y de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ dizem-se semelhantes se e só se existir uma matriz P invertível em $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ tal que $Y = P^{-1}XP$; das matrizes seguintes há *duas* que são semelhantes; assinale-as.

Resposta.: a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ ☐ b) $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ☐ c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ ☐ d) $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ ☐ e) $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ☐ f) $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ ☐

3.

i) Considere o espaço vectorial $\mathcal{P}$ dos polinómios $p(x) = a_0 + a_1x$ com coeficientes reais e a aplicação linear T de $\mathcal{P}$ em $\mathcal{P}$ que transforma $p_1(x) = 1 + x$ em $q_1(x) = 3 - x$ e transforma $p_2(x) = 1 - x$ em $q_2(x) = 9 - 3x$, isto é $T(p_1(x)) = q_1(x)$ e $T(p_2(x)) = q_2(x)$; fixada a base ordenada formada pelos polinómios $p_1(x), p_2(x)$, *a matriz* M de T *relativamente a essa base* é uma das seguintes; qual delas é?

Resposta.: a) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 6 & -1 \end{bmatrix}$ $\square$ b) $\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 6 & -1 \end{bmatrix}$ $\square$ c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}$ $\square$ d) $\begin{bmatrix} -2 & 6 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ $\square$ e) $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$ $\square$ f) $\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ $\square$

ii) Sendo $v_1 = (-3, -1)$, $v_2 = (-2, -4)$, $v_3 = (-3, 1)$, $v_4 = (3, -1)$, indique um dos seguintes conjuntos que constitua uma base própria relativamente à matriz M (que determinou na questão anterior):

Resposta.: a) $\{v_1, v_2\}$ $\square$ b) $\{v_2, v_3\}$ $\square$ c) $\{v_2, v_4\}$ $\square$ d) $\{v_1, v_4\}$ $\square$ e) $\{v_1, v_3\}$ $\square$ f) $\{v_3, v_4\}$ $\square$

iii) Indique uma matriz invertível P escolhida entre as propostas de tal forma que a matriz $P^{-1}MP$ seja diagonal.

R.: a) $\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ $\square$ b) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$ $\square$ c) $\begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ $\square$ d) $\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -4 & -1 \end{bmatrix}$ $\square$ e) $P = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ $\square$ f) $P = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ $\square$

iv) Considere o espaço vectorial $\mathcal{V}$ dos polinómios $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ com coeficientes reais e a aplicação linear $D : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ que ao polinómio $p(x)$ associa a sua derivada $p'(x)$; indique qual a dimensão i do subespaço de $\mathcal{V}$ que é a imagem da aplicação linear D e qual a dimensão k do núcleo de D.

Res.: a) $i = 1$ e $k = 1$ $\square$ b) $i = 2$ e $k = 1$ $\square$ c) $i = 1$ e $k = 2$ $\square$ d) $i = 2$ e $k = 3$ $\square$ e) $i = 2$ e $k = 2$ $\square$ f) $i = 0$ e $k = 3$ $\square$

4.

Seja V um espaço vectorial euclideano real de dimensão n e seja L um subespaço de dimensão k; diga em que condições a projecção ortogonal $\mathsf{pr}_L : V \to L$ é uma aplicação linear simétrica (ou, sinonimamente, autoadjunta):

Resposta. a) sempre $\square$ b) para $0 < k \leq n$ $\square$ c) para $0 \leq k < n$ $\square$ d) para $k = n$ $\square$ e) nunca $\square$ f) para $k = n - 1$ $\square$

****

Classificação a preencher pelo docente que corrige a prova:

1i

1ii

1iii

1iv

2i

2ii

2iii

2iv

3i

3ii

3iii

3iv

4

Total: