

1º TESTE de ANÁLISE MATEMÁTICA I

Licenciaturas em Eng^a. Biomédica, Informática, Materiais e Mecânica

28 de Abril de 2005

18:00 - 19:30

Justifique convenientemente todas as suas respostas

(Não é permitido o uso de qualquer elemento de consulta ou calculadora)

Parte I

1. Considere o seguinte subconjunto de \mathbb{R} (2.0)

$$A = \{x \in \mathbb{R} : \frac{x - \sqrt{2}}{x - 1} \leq 0\} \cap \mathbb{Q}.$$

- Determine, se existirem, os majorantes, minorantes, supremo, ínfimo, máximo e mínimo do conjunto A .
- Seja a_n uma sucessão crescente de termos em A . Será que a_n é necessariamente convergente? Justifique.

2. Mostre, por indução matemática, que (2.0)

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n},$$

para qualquer $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq 2$.

3. Calcule o limite das seguintes sucessões (4.0)

$$(a) \quad a_n = \frac{n^{20} + 20^n}{n! + n^n}, \quad (b) \quad b_n = \frac{\cos(n\pi)}{n^5 + 1},$$

$$(c) \quad c_n = \left(1 + \frac{1}{3n}\right)^n, \quad (d) \quad d_n = \frac{(2^n)^2}{1 + 3^n}.$$

Parte II

1. Diga se as seguintes séries são absolutamente convergentes, simplesmente convergentes ou divergentes (4.5)

$$(i) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3 + 2},$$

$$(ii) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2 + n}},$$

$$(iii) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{n^n}.$$

2. Sendo a_n o termo geral de uma sucessão de termos positivos, com limite $+\infty$, indique, justificando, qual a natureza das séries (3.0)

$$(i) \quad \sum \frac{a_n}{a_n + 1} \quad (ii) \quad \sum \frac{1}{3^n + a_n}.$$

3. Considere a série de potências (3.0)

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3^{n-1}}{4^n} (x+1)^n.$$

- (a) Diga para que valores de $x \in \mathbb{R}$ a série é convergente.
 (b) Calcule a soma da série de potências quando $x = 0$.

4. Diga se a seguinte sucessão, (1.5)

$$v_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \cdots + \frac{1}{n^2 + 1}$$

é convergente. Será limitada? Justifique.