

Soluções às questões do Primeiro Teste - 28/4/2005

I- 1) a) $A =]1, \sqrt{2}] \cap \mathbb{Q}$

Conj. dos majorantes de $A : [2, +\infty[$

Conj. dos minorantes de $A :]-\infty, 1]$

$\sup A = \sqrt{2}, \quad \inf A = 1.$

Como $\sup A$ e $\inf A$ não pertencem a A , o conjunto não tem máximo nem mínimo.

b) Toda a sucessão monótona e limitada é convergente. Como a_n é crescente e $0 \leq a_n \leq \sqrt{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$, então a_n é convergente.

2) Para $n = 2$, temos que $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} > 1$ é uma proposição verdadeira. Por hipótese de indução temos que a condição $P(n)$,

$$1 + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n} \quad (1)$$

se verifica para um dado $n \in \mathbb{N}$ e queremos provar que a condição se verifica para $n + 1$, i.e. que

$$1 + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} > \sqrt{n+1}. \quad (2)$$

Se (1) se verifica, então

$$1 + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} > \sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

Se mostramos que $\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} > \sqrt{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$ então (2) fica provado, ou seja fica provado $P(n+1)$.

$$\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} > \sqrt{n+1} \iff$$

$$\sqrt{n(n+1)} + 1 > n+1 \iff$$

$$n^2 + n > n \iff n^2 > 0 \quad \text{condição válida } \forall n \in \mathbb{N}.$$

$$3) a) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^{20} + 20^n}{n! + n^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{n^{20}}{n^n} + \frac{20^n}{n^n}}{\frac{n!}{n^n} + 1}.$$

Pela escala das sucessões $n^n \gg n! \gg n^{20} \gg 20^n$, tem-se que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^{20}}{n^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{20^n}{n^n} = 0, \quad \text{logo } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^{20} + 20^n}{n! + n^n} = 0.$$

b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\cos(n\pi)}{n^5 + 1} = 0$ porque o produto de uma sucessão limitada $\cos(n\pi)$ por um infinitésimo é um infinitésimo.

$$c) \lim \left(1 + \frac{1}{3n}\right)^n = \lim \left[\left(1 + \frac{1}{3n}\right)^{3n}\right]^{1/3} = e^{1/3}$$

$$d) \lim d_n = \lim \frac{(2^n)^2}{1+3^n} = \frac{1}{(\frac{1}{4})^n + (\frac{3}{4})^n}. \text{ Como } |\frac{1}{4}| < 1 \text{ e } |\frac{3}{4}| < 1, \text{ então } (\frac{1}{4})^n \rightarrow 0 \text{ e } (\frac{3}{4})^n \rightarrow 0. \text{ Assim, } \lim d_n = +\infty.$$

II- 1) (i) Solução : abs. convergente.

Sugestão : comparar com a série $\sum \frac{1}{n^2}$

(ii) Solução : série simplesmente convergente.

Sugestão : mostrar que a série dos modulos é divergente comparando com a série $\sum \frac{1}{n}$ e usar o critério de Leibnitz para mostrar que a série é convergente.

(iii) $a_n = \frac{(n+1)!}{n^n} > 0$. Aplicando o critério de d'Alembert vem que

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+2)!}{(n+1)^{n+1}} \frac{n^n}{(n+1)!} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^n (n+1)! (n+2)}{(n+1)^n (n+1) (n+1)!} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{(\frac{n+1}{n})^n} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+2}{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n} = \frac{1}{e} < 1. \end{aligned}$$

Logo $\sum a_n$ é convergente. Como $a_n > 0$, $\sum |a_n| = \sum a_n$, logo $\sum a_n$ é absolutamente convergente.

3) a) Solução: $R = \frac{3}{4}$. A série converge para $x \in]-\frac{7}{3}, \frac{1}{3}[$. Nos extremos do intervalo, a série diverge porque o termo geral não tende para zero.

b) Solução: A soma da série $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3^{n-1}}{4^n}$ é $\frac{3}{4}$.

4) $v_n = \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n^2+1}$ é a sucessão das somas parciais da sucessão $\frac{1}{n^2+1}$ por isso converge se e só se a série $\sum \frac{1}{n^2+1}$ converge.

Sugestão: usar o crit. de comparação com a série $\sum \frac{1}{n^2}$ para concluir que $\sum \frac{1}{n^2+1}$ é convergente. Se a sucessão v_n é convergente, então é limitada. (Neste caso tem-se que $\frac{1}{2} \leq v_n \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.)