

Exercícios Adicionais

9ª Aula

1. Considere a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \log\left(2 + \frac{k}{x}\right) & , \ x > 1 \\ 1 - x^2 & , \ x \leq 1 . \end{cases}$$

onde $k \in \mathbb{R}$ é uma constante.

- (a) Estude a função f no que respeita à continuidade em $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.
 - (b) Calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
 - (c) Determine o valor da constante $k \in \mathbb{R}$ para o qual a função f é contínua no ponto 1.
 - (d) Indique justificando o contradomínio de f .
2. Considere as funções f e g definidas em $]0, +\infty[$ por

$$\begin{aligned} f(x) &= \log \log(1+x) \\ g(x) &= \sqrt{x} \sin \frac{1}{x^2} . \end{aligned}$$

- (a) Estude as funções no que respeita à continuidade.
 - (b) Calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$
 - (c) Indique, justificando, o contradomínio de f .
3. Considere as funções **seno hiperbólico**, $\text{sh} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, e **coseno hiperbólico**, $\text{ch} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definidas por

$$\text{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{e} \quad \text{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} .$$

- (a) Mostre que:
 - i. $\text{ch}^2(x) - \text{sh}^2(x) = 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$,
 - ii. $\text{sh}(0) = 0$ e $\text{ch}(0) = 1$,
 - iii. $\text{sh}(-x) = -\text{sh}(x)$ e $\text{ch}(-x) = \text{ch}(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$,
 - iv. $\text{ch}(x) + \text{sh}(x) = e^x$ e $\text{ch}(x) - \text{sh}(x) = e^{-x}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
- (b) Esboce o gráfico das funções $\text{sh}(x)$ e $\text{ch}(x)$.