Exercícios Adicionais

5ª Aula

1. Determine, se existirem, os limites das seguintes sucessões.

$$\text{(a) } x_n = \frac{(n+1)!}{n^n} \qquad \text{(b) } x_n = \frac{3^n}{n^{n+1}+n!} \qquad \text{(c) } x_n = \frac{\sqrt{n^2+1}}{\sqrt[3]{n}+2}$$

$$\text{(d) } x_n = \frac{n^3}{\sqrt[3]{n^2+n}} \qquad \text{(e) } x_n = \frac{3\sqrt{n}}{\sqrt[4]{n^2+1}}$$

2. Determine, se existirem, os limites das seguintes sucessões.

$$\text{(a) } x_n = \frac{n!}{n^{n+1}} \qquad \text{(b) } x_n = \frac{\sqrt{3n^2+2}}{n^2} \qquad \text{(c) } x_n = \frac{\sqrt[5]{n}+1}{\sqrt{n+3}}$$

$$\text{(d) } x_n = \frac{\sqrt[3]{n+3n^3}}{n+5} \qquad \text{(e) } x_n = \frac{2^{n-2}}{4^n+n!}$$

3. Considere a sucessão (x_n) definida por

$$x_1 = \frac{3}{2} \qquad \text{e} \qquad x_{n+1} = \frac{x_n^2+2}{3} \quad \text{para todo o } n \in \mathbb{N}\,.$$

   (a) Utilizando o princípio de indução, verifique que $1 < x_n < 2$ para todo o $n \in \mathbb{N}$.

   (b) Mostre que a sucessão (x_n) é decrescente (atenda ao resultado de (a)).

   (c) Justifique que a sucessão (x_n) é convergente e calcule $\lim x_n$.

4. Mostre que cada uma das seguintes séries é convergente com soma igual ao valor indicado

$$\text{(a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2} \qquad \text{(b) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^{n-1}} = 3 \qquad \text{(c) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1} = \frac{3}{4}$$

$$\text{(d) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+3^n}{6^n} = \frac{3}{2} \qquad \text{(e) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+n}} = 1$$

$$\text{(f) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+1}}{2^{2n}} = 9 \qquad \text{(g) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+(-1)^n}{2^n} = \frac{5}{3}.$$

5. Justifique que a série $\sum_{n=0}^{\infty} \pi^{-n}(-1)^n$ converge e mostre que a sua soma é $\frac{\pi}{\pi+1}$.