Exercícios Adicionais

13ª Aula

1. Determine, se existirem em $\overline{\mathbb{R}}$, os seguintes limites.

   (a) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{x-\sin x}{(x\sin x)^{3/2}}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin(2x)-2\arcsin(x)}{x^3}$ (c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{-1/x^2}}{x^{1000}}$

   (d) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} x^{\frac{1}{x-1}}$ (e) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} x^{1/4}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ (f) $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} \log(x)\log(1-x)$

2. Usando uma série de Taylor adequada, calcule as derivadas $f^{(n)}(x_0)$, para as seguintes funções $f(x)$, no ponto x_0 e de ordem n.

   (a) $f(x) = \mathrm{sh}x$, $x_0 = 0$, $n = 8$.
   (b) $f(x) = x^3 e^{-2x}$, $x_0 = 0$, $n = 13$.
   (c) $f(x) = \dfrac{3}{2x-5}$, $x_0 = 3$, $n = 27$.

3. Usando uma série de Taylor adequada, calcule as derivadas $f^{(n)}(x_0)$, para as seguintes funções $f(x)$, no ponto x_0 e de ordem n.

   (a) $f(x) = (x-2)^2 e^{-x+2}$, $x_0 = 2$, $n = 21$.
   (b) $f(x) = \dfrac{4}{4-x}$, $x_0 = 2$, $n = 5$.

4. Considere a função $f : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = -x + x^2\cos(\frac{1}{x})$.

   (a) Mostre que $f'''(x) = -\frac{4}{x^2}\mathrm{sen}(\frac{1}{x})$.
   (b) Escreva a fórmula de Taylor de segunda ordem de f em relação a $x = \frac{2}{\pi}$ e mostre que o erro que se comete ao aproximar a função pelo polinómio de Taylor em $[\frac{1}{2}, 1]$ é inferior a $\frac{1}{3}$.

5. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = 2e^{-x}\mathrm{ch}x - 1 + \frac{1}{2}x.$$

   (a) Escreva o polinómio de Taylor de segunda ordem associado a f relativo ao ponto $x = 1$.

(b) Indique um majorante do erro que se comete ao aproximar a função f no intervalo $[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$ pelo polinómio obtido em (a).

6. Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função duas vezes diferenciável tal que $g'(e) = g'(\frac{1}{e}) = g'(-e) = g'(-\frac{1}{e}) = 1$.

   (a) Justifique que a equação $g''(x) = 0$ tem pelo menos três soluções em $\mathbb{R}$.

   (b) Sendo $f(x) = x^2 e^x$, calcule $(g \circ f)'(1)$ e $(g \circ f)'(-1)$ e justifique que existe um $c \in \mathbb{R}$ tal que $(g \circ f)'(c) = 0$.