Exercícios Adicionais

10ª Aula

1. Calcule $f'(x)$, sempre que exista, nos casos em que a função f é definida pela expressão:

   (a) $f(x) = x^4 + \sin(x)$ (b) $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$

   (c) $f(x) = \dfrac{1}{2+\cos(x)}$ (d) $f(x) = \dfrac{x+\cos(x)}{1-\sin(x)}$

   (e) $f(x) = \mathrm{sh}(x)\mathrm{ch}(x)$ (f) $f(x) = \dfrac{1}{1+\sqrt{x}}$

   (g) $f(x) = x^{1/3} + x^{-1/4}$ (h) $f(x) = \mathrm{tg}(x) - x$

   (i) $f(x) = \mathrm{tg}^2(x)$ (j) $f(x) = \cos(2x) - 2\mathrm{sen}(x)$

   (k) $f(x) = \mathrm{sen}(e^x)$ (l) $f(x) = \log(1+x^2)$ (m) $f(x) = e^{\sqrt{x}}$.

2. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} a + bx & , \ x \leq 0 \\ \mathrm{arctg}\ (1/x) & , \ x > 0\ , \end{cases}$$

   com $a, b \in \mathbb{R}$ fixos.

   (a) Mostre que f é diferenciável no ponto 1 e escreva uma equação da tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 1.

   (b) Sabendo que f é diferenciável no ponto 0, determine os valores de a e b.

   (c) Defina f' e diga se a função f' é contínua em $\mathbb{R}$.

3. Sendo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = x^4 e^{-x}$, e sendo $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável, calcule $(g \circ f)'(x)$ em termos da função g'.

4. Seja $f(x) = 1 - x^{2/3}$. Mostre que $f(1) = f(-1) = 0$, mas que $f'(x)$ nunca é zero no intervalo $[-1, 1]$. Explique porque é que este facto não contraria o Teorema de Rolle.

5.

(a) A área de uma círculo de raio r é πr^2 e o seu perímetro é $2\pi r$. Mostre que a taxa de variação da área em relação ao raio é igual ao perímetro.

(b) O volume de uma esfera de raio r é $4\pi r^3/3$ e a área da sua superfície é $4\pi r^2$. Mostre que a taxa de variação do volume em relação ao raio é igual à área da superfície.

6. Determine a derivada g' em termos de f' se:

(a) $g(x) = f(x^2)$

(b) $g(x) = f[f(x)]$

(c) $g(x) = f(\sin^2(x)) + f(\cos^2(x))$