Departamento de Matemática

Probabilidades e Estatística

MEFT + MEBM + MEQ + LEMat

Primeiro teste - Época de recurso — 2º semestre – 2010/2011
Duração: 90 minutos — 25/06/2011 – 9:00

▼ Justifique convenientemente todas as respostas ▼

Grupo I	10 valores

1. Admita que, numa determinada população humana, a altura de indivíduos adultos do género masculino segue uma distribuição normal com valor esperado 173 cm e desvio padrão 3 cm, enquanto que a altura de indivíduos adultos do género feminino segue uma distribuição normal com valor esperado 167 cm e desvio padrão 3 cm. Suponha que 52% dos indivíduos dessa população são do género feminino, sendo os restantes do género masculino.

(a) Escolhendo ao acaso um indivíduo do género masculino, qual é a probabilidade desse indivíduo ter altura superior a 170 cm? (2.0)

Sejam X altura de indivíduo adulto, M indivíduo masculino e F indivíduo feminino. Tem-se que $X_M \sim N(173, 9)$ e $X_M \sim N(167, 9)$, onde X_M e X_F são as alturas de indivíduo masculino e feminino, respectivamente. Assim,

$$P(X > 170|M) = P\left(\frac{X_M - E(X_M)}{\sqrt{Var(X_M)}} > \frac{170 - 173}{3}\right) = 1 - F_{N(0,1)}(-1) \approx 0.8413$$

(b) Calcule a probabilidade de um indivíduo, escolhido ao acaso da população, ter altura superior a 170 cm. (3.0)

$$\begin{aligned} P(X > 170) &= P(M)P(X > 170|M) + P(F)P(X > 170|F) \\ &= 0.48\,(1 - F_{N(0,1)}(-1)) + 0.52\,(1 - F_{N(0,1)}(1)) \\ &= 0.48 \times 0.8413 + 0.52 \times 0.1586 \;\approx\; 0.4863. \end{aligned}$$

2. Suponha que num lote de 1000 transístores existem 40 que não satisfazem os critérios de qualidade exigidos.

(a) Calcule a probabilidade de em 12 desses transístores, escolhidos ao acaso e com reposição do lote, haver quando muito dois transístores que não satisfazem os critérios de qualidade exigidos. (2.5)

Seja X = o número de transístores que não satisfazem os critérios de qualidade exigidos em 12 transístores, escolhidos ao acaso e com reposição do lote. Havendo 12 ensaios de Bernoulli (p) independentes e identicamente distribuídos, onde $p = 40/1000$ é a probabilidade de um transístor não satisfazer os critérios de qualidade exigidos, $X \sim \text{Binomial}(12, 0.04)$. Portanto,

$$P(X \leq 2) = \sum_{x=0}^{2} \binom{12}{x} 0.04^x 0.96^{12-x} = 0.6127 + 0.3064 + 0.0702 \approx 0.9893.$$

(b) Determine a probabilidade de ser necessário inspeccionar, ao acaso e com reposição, mais de 2 transístores do lote até ser encontrado o primeiro que não satisfaz os critérios de qualidade exigidos. (2.5)

Seja Y = o número de transístores inspeccionados até encontrar o primeiro que não satisfaz os critérios de qualidade exigidos. Suponho ensaios de Bernoulli($p = 0.04$) independentes e identicamente distribuídos, $Y \sim$ Geométrica(0.04), pelo que

$$P(Y > 2) = 1 - \sum_{y=1}^{2} 0.04\,(0.96)^{y-1} = 1 - 0.04 - 0.04\,0.96 = 0.9216.$$

Grupo II	10 valores

1. A procura diária de bolos de aniversário numa confeitaria é uma variável aleatória com distribuição uniforme discreta em $\{0, 1, 2, 3, 4\}$.

(a) Calcule o valor aproximado da probabilidade de a procura total desses bolos num trimestre (90 dias) ser quando muito 200 bolos. (4.0)

Seja X_i = a procura de bolos de aniversário no i-ésimo dia i da confeitaria, $i = 1, \ldots, 90$. Suponha que $X_1, \ldots, X_{90}$ são variáveis independentes e identicamente distribuídas (i.i.d) segundo $X \sim$ Uniforme discreta$\{0, 1, 2, 3, 4\}$, i.e., $P(X = x) = 1/5$, se $x = 0, 1, 2, 3, 4$, e 0, no caso contrário. Seja ainda $T \equiv \sum_{i=1}^{90} X_i$. Pelo T.L.C. (grandes amostras),

$$Z = \frac{T - E(T)}{\sqrt{Var(T)}} \overset{a}{\sim} N(0, 1),$$

onde $E(T) = \sum_{i=1}^{90} E(X_i) \overset{i.d.}{=} 90 \times E(X) = 180$, $Var(T) \overset{i.}{=} \sum_{i=1}^{90} Var(X_i) \overset{i.d.}{=} 90 \times Var(X) = 180$, $E(X) = \sum_{x=0}^{4} x1/5 = 2$ e $Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \sum_{x=0}^{4} x^2 1/5 - 2^2 = 2$. Assim,

$$P(T \le 200) \approx P\left(Z \le \frac{200 - 180}{\sqrt{180}}\right) = F_{N(0,1)}(1.491) \approx 0.9319.$$

(b) Admita que cada bolo de aniversário só pode ser vendido no dia em que é fabricado, dando um lucro de 10 euros caso seja vendido e um prejuízo de 5 euros no caso contrário. Calcule o lucro esperado, obtido com a venda desses bolos, num dia em que são fabricados 3 bolos. (2.0)

Seja W o lucro com a venda de bolos num dia em que são fabricados 3 bolos, com função (massa) de probabilidade e valor esperado dados, respectivamente, por

W	-15	0	15	30
$P(W = w)$	$P(X=0) = \frac{1}{5}$	$P(X=1) = \frac{1}{5}$	$P(X=2) = \frac{1}{5}$	$P(X \ge 3) = \frac{2}{5}$

$$E(W) = \sum_{w=-15}^{30} wP(W = w) = (-15 + 0 + 15 + 60)/5 = 12.$$

2. O grau de pureza dos reagentes 1 e 2 num processo químico são variáveis aleatórias X e Y, respectivamente, com função densidade de probabilidade conjunta

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} 4\,x\,(1 - y) & ,\ 0 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le 1 \\ 0 & ,\ \text{caso contrário.} \end{cases}$$

(a) Determine as funções densidade de probabilidade marginais de X e de Y. O que pode concluir acerca da independência entre os graus de pureza dos reagentes 1 e 2 ? (2.5)

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dy = \begin{cases} 4x\left(y - y^2/2\right)\big|_0^1 = 2x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dx = \begin{cases} 4(1-y)\left(x^2/2\right)\big|_0^1 = 2(1-y), & 0 \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

Por conseguinte, os graus de pureza dos reagentes 1 e 2 são indenpendentes, visto que $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) \times f_Y(y),\ \forall\,(x.y)$.

(b) Calcule a probabilidade do grau de pureza do reagente 1 ser de pelo menos 0.5, sabendo que o grau de pureza do reagente 2 é de pelo menos 0.5. (1.5)

$$P(X \geq 0.5 | Y \geq 0.5) \overset{*}{=} P(X \geq 0.5) = \int_{0.5}^{1} f_X(x)dx = 2\,\frac{x^2}{2}\bigg|_{0.5}^{1} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}.$$

* X e Y são variáveis aleatórias independentes (alínea a)).