Departamento de Matemática

Probabilidades e Estatística

MEC + LEGM + LET + LEIC-A

Primeiro teste — 1º semestre – 2010/2011

Duração: 90 minutos — 20/11/2010 – 11:00

▼ **Justifique convenientemente todas as respostas** ▼

Grupo I — 5 valores

1. Uma fábrica produz *chips* em 5 linhas de produção que são enviados para o mercado em lotes. Todas as linhas produzem a mesma quantidade de lotes e cada lote contém apenas unidades produzidas por uma única linha. Em condições normais, cada lote produzido contém 2% de *chips* defeituosos. Todavia, num dado mês a ocorrência de problemas mecânicos na linha L_1 fez com que esta passasse a produzir lotes com 5% de *chips* defeituosos durante esse período.

(a) Um *chip* retirado ao acaso de um lote produzido nesse mês revelou-se defeituoso. Qual a probabilidade de esse *chip* ter sido produzido pela linha L_1? (1.0)

Relativamente ao mês em questão sejam $L_1 =$"um *chip* foi produzido pela linha L_1" e $D =$"um *chip* é defeituoso". Tem-se que $P(L_1) = 1/5$, $P(D \mid L_1) = 0.05$, $P(D \mid \bar{L}_1) = 0.02$.
Então, $P(L_1 \mid D) = \dfrac{P(D \mid L_1)P(L_1)}{P(D \mid L_1)P(L_1) + P(D \mid \bar{L}_1)P(\bar{L}_1)} = \dfrac{0.05 \times 1/5}{0.05 \times 1/5 + 0.02 \times 4/5} = \dfrac{0.05}{0.13} = \dfrac{5}{13} \approx 0.385.$

(b) Um cliente, que recebeu um lote produzido naquele mês, decide testar 3 *chips* retirados ao acaso e com reposição do lote. Qual a probabilidade de encontrar apenas um *chip* defeituoso? (1.5)

Seja $X =$"número de *chips* defeituosos na amostra de 3 *chips*". Então, $P(X = 1) = P(X = 1 \mid L_1)P(L_1) + P(X = 1 \mid \bar{L}_1)P(\bar{L}_1) = \frac{1}{5}\binom{3}{1} \times 0.05 \times (1-0.05)^2 + \frac{4}{5}\binom{3}{1} \times 0.02 \times (1-0.02)^2 \approx 0.073$, uma vez que, sendo as tiragens feitas com reposição, a variável representa o número de sucessos em 3 realizações independentes de uma prova de Bernoulli e, assim, $X \mid L_1 \sim Bi(3, 0.05)$ e $X \mid \bar{L}_1 \sim Bi(3, 0.02)$.

2. A resistência à tracção de um certo tipo de placas cerâmicas é uma variável aleatória, X, com a seguinte função densidade de probabilidade

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{x}{32}, & 0 < x < 4 \\ \frac{3}{4}e^{-x+4}, & x \geq 4 \end{cases}.$$

(a) Calcule a resistência mediana de uma placa cerâmica. (1.0)

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \int_0^x \frac{t}{32}\,dt = \frac{x^2}{64}, & 0 \leq x < 4 \\ \int_0^4 \frac{t}{32}\,dt + \int_4^x \frac{3}{4}e^{-t+4}\,dt = 1 - \frac{3}{4}e^{-x+4}, & x \geq 4 \end{cases}.$$

Uma vez que $F_X(4) = 1/4 < 1/2$ tem-se que $F_X(x) = 1/2 \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{3}{4}e^{-x+4} \Leftrightarrow x = 4 - \log(2/3) \Leftrightarrow x \approx 4.41$.

(b) Determine a probabilidade de ser necessário testar mais do que 4 placas até ser encontrada a primeira com resistência à tracção superior a 4. (1.5)

Seja Y =“número de placas testadas até ser encontrada a primeira com resistência superior a 4”. Admitindo que as resistências de diferentes placas são variáveis independentes, $Y \sim Geo(p)$, com $p = P(X > 4) = 1 - F_X(4) = \frac{3}{4}$, uma vez que representa o número de realizações independentes de uma prova de Bernoulli até se observar o primeiro sucesso.
Então, $P(Y > 4) = 1 - F_Y(4) \approx 0.004$ ou, alternativamente, $P(Y > 4) = \sum_{i=5}^{+\infty} \frac{1}{4^{i-1}} \frac{3}{4} = \frac{3}{4} \sum_{j=4}^{+\infty} \frac{1}{4^j} = \frac{1}{4^4}$.

Grupo II	5 valores

1. A duração de um certo tipo de bateria de automóvel é uma variável aleatória, T, com valor esperado de 1200 dias e desvio padrão de 100 dias.

(a) Considere um conjunto de 200 baterias desse tipo com durações T_i, $i = 1, \ldots, 200$, e seja $\bar{T} = \frac{1}{200} \sum_{i=1}^{200} T_i$ a média dessas durações. Determine a probabilidade (aproximada) de $\bar{T}$ tomar um valor entre 1100 e 1300 dias. (1.5)

Pelo T.L.C tem-se que $Z = \frac{\bar{T} - E[\bar{T}]}{\sqrt{Var[\bar{T}]}} \overset{a}{\sim} N(0, 1)$, em que $E[\bar{T}] = E[T] = 1200$ e $Var[\bar{T}] = Var[T]/200 = 100^2/200$.
Assim, $P(1100 < \bar{T} < 1300) = P(-\sqrt{200} < Z < \sqrt{200}) \approx 2\Phi(\sqrt{200}) - 1 \approx 1$.

(b) Suponha agora que a duração de cada bateria se distribui segundo uma lei Normal. Que tempo de garantia deve estabelecer o fabricante se desejar que apenas 10% das baterias vendidas tenham de ser substituídas antes de expirado aquele tempo? (1.0)

Agora, $T \sim N(1200, 100^2)$. $P(T < t) = 0.10 \Leftrightarrow F_T(t) = 0.10 \Leftrightarrow t = F_T^{-1}(0.10) \Leftrightarrow t \approx 1071.84$ dias.
Alternativamente, $P(T < t) = 0.10 \Leftrightarrow \Phi\left(\frac{t-1200}{100}\right) = 0.10 \Leftrightarrow t = 1200 + 100\Phi^{-1}(0.10) \Leftrightarrow t = 1200 - 100 \times 1.2816 = 1071.84$ dias.

2. Sendo X (respectivamente, Y) o número de páginas com alto (respectivamente, baixo) conteúdo gráfico em 2 páginas retiradas ao acaso do sítio *web* de uma empresa, considere que a função de probabilidade conjunta de (X, Y) está resumida na tabela seguinte:

$X \backslash Y$	0	1	2
0	0.36	0.36	0.09
1	0.12	0.06	0
2	0.01	0	0

(a) Determine o número esperado de páginas com baixo conteúdo gráfico em 2 páginas quando se sabe que uma destas possui um alto conteúdo gráfico. (1.0)

$$E[Y \mid X = 1] = \sum_{y=0}^{2} y f_{Y|X=1}(y) = \sum_{y=0}^{2} y \frac{f_{X,Y}(1, y)}{f_X(1)} = \frac{1}{f_X(1)}(f_{X,Y}(1, 1) + 2f_{X,Y}(1, 2)) = \frac{0.06}{0.18} = \frac{1}{3},$$ uma vez que $f_X(1) = \sum_{y=0}^{2} f_{X,Y}(1, y) = 0.18$.

(b) Calcule o valor da função de distribuição conjunta no ponto $(2, 0)$ e o valor de $P(X^2 + 2Y \geq 4)$. (1.5)

$$F_{X,Y}(2, 0) = P(X \leq 2, Y \leq 0) = \sum_{x \leq 2} \sum_{y \leq 0} f_{X,Y}(x, y) = \sum_{x=0}^{2} f_{X,Y}(x, 0) = 0.49.$$
$$P(X^2 + 2Y \geq 4) = \sum_{x^2+2y \geq 4} \sum f_{X,Y}(x, y) = f_{X,Y}(0, 2) + f_{X,Y}(1, 2) + f_{X,Y}(2, 0) + f_{X,Y}(2, 1) + f_{X,Y}(2, 2) = 0.1.$$