Departamento de Matemática

Probabilidades e Estatística

MEFT + MEBM + MEQ + LEMat

Primeiro teste - versão 1 — 2º semestre – 2010/2011

Duração: 90 minutos — 16/04/2011 – 11:00

▼ Justifique convenientemente todas as respostas ▼

Grupo I	10 valores

1. Uma fábrica de gelados recebe leite em recipientes oriundos de 3 produtores (.A, B e C), sendo que 30% dos recipientes são provenientes do produtor A e 30% do produtor B. Sabe-se que o leite de 10% dos recipientes oriundos do produtor A é adulterado com adição de água, enquanto que para os produtores B e C essa percentagem é de 5% e 3%, respectivamente. Um recipiente foi escolhido ao acaso e o respectivo leite foi testado.

(a) Qual é a probabilidade de o leite testado estar adulterado? (2.5)

Sejam A, B e C = "leite do produtor A, B e C, respectivamente, e D = "leite adulterado". Tem-se que $P(A) = 0.3$, $P(B) = 0.3$, $P(D|A) = 0.1$, $P(D|B) = 0.05$ e $P(D|C) = 0.03$. $P(D) = P(D \cap A) + P(D \cap B) + P(D \cap C) = P(A)P(D|A) + P(B)P(D|B) + P(C)P(D|C) = 0.3 \times 0.1 + 0.3 \times 0.05 + 0.4 \times 0.03 = 0.057$, uma vez que $P(C) = 1 - P(A) - P(B) = 0.4$.

(b) Sabendo que o teste detectou que o leite estava adulterado, qual é a probabilidade de o recipiente ser proveniente dos produtores A ou B? (1.5)

$P(A \cup B|D) = P(A|D) + P(B|D) - P(A \cap B|D) = P(A \cap D)/P(D) + P(B \cap D)/P(D) = (0.3 \times 0.1 + 0.3 \times 0.05)/0.057 \approx 0.7895$, uma vez que $A \cap B = \emptyset$.

2. O número de erros tipográficos de determinado livro ocorre segundo um processo de Poisson com número esperado de erros por página igual a 0.5.

(a) Calcule a probabilidade de um conjunto de três páginas do livro não apresentar erros tipográficos. (1.5)

Seja X_t = número de erros tipográficos em t páginas". Tem-se que $X_t \sim \text{Poisson}(\lambda\, t)$ (Processo de Poisson) e $E(X_1) = 0.5 = \lambda$. Ou seja, $X_t \sim \text{Poisson}(0.5\, t)$ e, consequentemente, $X_3 \sim \text{Poisson}(1.5)$. $P(X_3 = 0) = \exp(-1.5) \approx 0.2231$.

(b) Qual é a probabilidade de, em 10 páginas distintas do livro, haver duas ou mais páginas com pelo menos um erro tipográfico? (2.5)

Seja Y =número de páginas com pelo menos um erro tipográfico de entre 10 seleccionadas ao acaso". Admitindo independência entre os números de erros tipográficos em páginas distintas, tem-se que $Y \sim \text{Binomial}(10, p)$ em que $p = P(X_1 > 0) = 1 - P(X_1 = 0) = 1 - \exp(-0.5) = 0.3935$, uma vez que a variável representa o número de sucessos em 10 provas de Bernoulli independentes e identicamente distribuídas. Então, $P(Y \geq 2) = \sum_{y=2}^{10} \binom{10}{y} p^y (1-p)^{10-y} = 1 - F_Y(1) \approx 0.9496$.

(c) Quais são os números médio e mediano de páginas do livro a inspeccionar até encontrar a primeira página com pelo menos um erro tipográfico? (2.0)

Seja W = "número de de páginas a inspeccionar até encontrar a primeira página com erro tipográfico". Admitindo que erros tipográficos ocorrem independentemente uns dos outros, tem-se que W representa o número de realizações independentes de uma prova de Bernoulli ($p = P(X_1 > 0) = 0.3935$) até se observar o primeiro sucesso e, assim, $W \sim \text{Geométrica}(0.3935)$. $E(W) = \sum_{w=1}^{\infty} p(1-p)^{w-1} = 1/p \approx 2.54$. Seja w_0 a mediana de W, i.e., $P(W \leq w_0) \geq 0.5$ e $P(W \geq w_0) \geq 0.5$. Como $P(W = 1) = 0.3935$ e $P(W = 2) = p(1-p) = 0.2387$, então $F_W(2) = 0.6322 \geq 0.5$ e $P(W \geq 2) = 1 - F_W(1) = 0.6065 \geq 0.5$. Portanto, os números médio e mediano de W são 2.54 e 2, respectivamente.

Grupo II	10 valores

1. A duração, em minutos, de uma chamada telefónica feita por um adolescente é uma variável aleatória com distribuição exponencial. Admitindo que a probabilidade da duração de uma chamada ser superior a 40 minutos é igual a e^{-1}, calcule:

(a) A probabilidade de uma chamada telefónica efectuada pelo adolescente exceder 1 hora. (1.5)

Seja X = "duração de uma chamada telefónica (em minutos)" com $X \sim$ Exponencial(λ) e $P(X > 40) = e^{-1}$. Como, para $x > 0$, $P(X > x) = \int_x^{\infty} \lambda e^{-\lambda u} du = -e^{-\lambda u}|_x^{\infty} = e^{-\lambda x}$, então $P(X > 40) = e^{-\lambda 40} = e^{-1} \Leftrightarrow \lambda = 1/40$. Portanto, $P(X > 60) = e^{-60/40} = e^{-3/2} \approx 0.2231$.

(b) Um valor aproximado para a probabilidade da duração total de 50 chamadas telefónicas, escolhidas ao acaso, efectuadas pelo adolescente ser superior a 30 horas. (3.0)

Seja $T \equiv \sum_{i=1}^{50} X_i$ a duração total de 50 chamadas telefónicas, escolhidas ao acaso, onde X_i = a duração de i-ésima chamada telefónica, $i = 1, \ldots, 50$, supostamente independentes e identicamente distribuídas (i.i.d) com $E(X) = 1/\lambda = 40$ e $Var(X) = 1/\lambda^2 = 1600$. Pelo T.L.C. (grandes amostras), $Z = \frac{T-E(T)}{\sqrt{Var(T)}} \overset{a}{\sim} N(0,1)$, onde $E(T) = \sum_{i=1}^{50} E(X_i) \overset{i.d.}{=} 50 \times E(X) = 2000$ e $Var(T) \overset{i.}{=} \sum_{i=1}^{50} Var(X_i) \overset{i.d.}{=} 50 \times Var(X) = 80000$. Assim, $P(T > 1800) \approx P(\frac{T-E(T)}{\sqrt{Var(T)}} > \frac{1800-2000}{\sqrt{80000}}) = P(Z > -0.71) = F_Z(0.71) \approx 0.7611$.

(c) A máxima duração que é excedida por pelo menos 75% das chamadas telefónicas por ele efectuadas. (1.5)

Seja k a máxima duração x das chamadas telefónicas tal que $P(X > x) \geq 0.75$. Como $P(X > x) = e^{-x/40} \geq 0.75 \Leftrightarrow x \leq -40 \log(0.75) = 11.51$, então $k = 11.51$ minutos.

2. Admita que duas variáveis aleatórias discretas, X e Y, têm função de probabilidade conjunta:

X/Y	-1	0	1
-1	0.10	0.15	0.10
0	0.15	0	0.30
1	0.05	0.05	0.10

(a) Determine o valor modal de Y. (1.5)

$$f_Y(y) = \sum_x f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 0.1 + 0.15 + 0.05 = 0.3, & y = -1 \\ 0.15 + 0.05 = 0.2, & y = 0 \\ 0.1 + 0.3 + 0.1 = 0.5, & y = 1 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

Por conseguinte, a moda de $Y = 1$, visto que $f_Y(1) = 0.5 = \max_y f_Y(y)$.

(b) Calcule a variância de X condicional a $Y = 0$. (1.5)

$$f_{X|Y=0}(x) = \frac{f_{X,Y}(x,0)}{f_Y(0)} = \begin{cases} 0.15/0.2 = 0.75, & x = -1 \\ 0.05/0.2 = 0.25, & x = 1 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

$E(X|Y=0) = \sum_x x f_{X|Y=0}(x) = -0.75 + 0.25 = -0.5$ e $E(X^2|Y=0) = \sum_x x^2 f_{X|Y=0}(x) = 0.75 + 0.25 = 1 \Rightarrow Var(X|Y=0) = E(X^2|Y=0) - (E(X|Y=0))^2 = 0.75$

(c) Determine a função de probabilidade da variável aleatória $E(X|Y)$. (1.0)

$$f_{X|Y=-1}(x) = \frac{f_{X,Y}(x,-1)}{f_Y(-1)} = \begin{cases} \frac{0.1}{0.3} = 1/3, & x=-1 \\ \frac{0.15}{0.3} = 1/2, & x=0 \\ \frac{0.05}{0.3} = 1/6, & x=1 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases} \Rightarrow E(X|Y=-1) = \sum_x x f_{X|Y=-1}(x) = \frac{1}{6}$$

$$f_{X|Y=1}(x) = \frac{f_{X,Y}(x,1)}{f_Y(1)} = \begin{cases} \frac{0.1}{0.5} = 1/5, & x=-1,1 \\ \frac{0.3}{0.5} = 3/5, & x=0 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases} \Rightarrow E(X|Y=1) = \sum_x x f_{X|Y=1}(x) = 0$$

Seja $Z = E(X|Y)$ e note-se que $E(X|Y=0) = -1/2$ (alínea b). Portanto,

$$f_Z(z) = \begin{cases} f_Y(-1) = 0.3, & z=-1/6 \\ f_Y(0) = 0.2, & z=-1/2, \\ f_Y(1) = 0.5, & z=0 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$