Departamento de Matemática

Probabilidades e Estatística

MEC + LEGM + LET + LEIC-A

Primeiro teste (recurso) — 1º semestre – 2010/2011

Duração: 90 minutos — 03/02/2011 – 11:30

▼ Justifique convenientemente todas as respostas ▼

Grupo I — 5 valores

1. Um sistema de detecção de utilizações fraudulentas de cartões de crédito regista, em cada dia e para cada cartão, o número de concelhos em que cada cartão é usado e se movimenta quantias elevadas. Dados históricos indicam que 1% das utilizações diárias são fraudulentas e que, de entre essas, em 30% dos casos são movimentadas quantias elevadas e o cartão é utilizado em mais do que dois concelhos no mesmo dia. A probabilidade deste último acontecimento baixa para 1% entre as utilizações legítimas.

(a) Calcule a probabilidade de, num qualquer dia, um cartão de crédito ter sido usado fraudulentamente sabendo que foi utilizado em mais do que dois concelhos e que movimentou quantias elevadas. (1.0)

Relativamente a um qualquer dia sejam $F =$"um cartão é utilizado fraudulentamente", $C =$"um cartão é usado em mais do que dois concelhos" e $E =$"um cartão movimenta quantias elevadas". Tem-se que $P(F) = 0.01$, $P(C \cap E \mid F) = 0.30$ e $P(C \cap E \mid \bar{F}) = 0.01$.
$P(F \mid C \cap E) = \dfrac{P(C \cap E \mid F)P(F)}{P(C \cap E)} = \dfrac{0.3 \times 0.01}{0.0129} \approx 0.233$, uma vez que $P(C \cap E) = P(C \cap E \mid F)P(F) + P(C \cap E \mid \bar{F})P(\bar{F}) = 0.30 \times 0.01 + 0.01 \times 0.99 = 0.0129$.

(b) Determine a probabilidade de ter ocorrido uma utilização fraudulenta de um cartão que não foi usado em mais do que dois concelhos ou não movimentou quantias elevadas num certo dia. Compare o resultado obtido com o da alínea anterior e comente. (1.5)

$P(F \mid \bar{C} \cup \bar{E}) = \dfrac{P(\bar{C} \cup \bar{E} \mid F)P(F)}{P(\bar{C} \cup \bar{E})} = \dfrac{P(\overline{C \cap E} \mid F)P(F)}{P(\overline{C \cap E})} = \dfrac{[1 - P(C \cap E \mid F)]P(F)}{1 - P(C \cap E)} = \dfrac{0.7 \times 0.01}{1 - 0.0129} = \dfrac{0.007}{0.9871} \approx 0.0071$.
Como $\dfrac{P(F \mid C \cap E)}{P(F \mid \bar{C} \cup \bar{E})} \approx 33$, podemos afirmar que é 33 vezes mais provável que um cartão tenha sido usado fraudulentamente dado que foi usado em mais do que dois concelhos num dia e movimentou quantias elevadas do que um outro cartão que não satisfaz alguma dessas duas condições.

2. Num acelerador de partículas é utilizado um dispositivo para detectar um tipo de partícula cuja detecção é particularmente difícil. De facto, cada partícula desse tipo tem uma probabilidade de 0.8 de não ser detectada pelo dispositivo ao percorrer o acelerador.

(a) Admitindo que o acelerador tem um único desses dispositivos, calcule a probabilidade de que seja necessária a passagem de pelo menos 10 partículas pelo acelerador até que ocorra a primeira detecção. (1.0)

Seja $X =$"número de partículas que passam pelo acelerador até ocorrer a primeira detecção". Admitindo que as partículas são detectadas ou não independentemente umas das outras, tem-se que X representa o número de realizações independentes de uma prova de Bernoulli até se observar o primeiro sucesso e, assim, $X \sim Geo(0.2)$.
$P(X \geq 10) = 1 - P(X < 10) = 1 - P(X \leq 9) = 1 - F_X(9) = (1 - 0.2)^9 \approx 0.134$.

(b) Considerando que n dispositivos são colocados ao longo do acelerador, determine qual o menor valor de n para que a probabilidade de uma partícula ser detectada por pelo menos um dos dispositivos seja no mínimo de 0.9. (1.5)

Seja $Y =$"número de dispositivos que detectam uma partícula de entre os n colocados no acaelerador". Admitindo que os dispositivos funcionam independentemente tem-se que $Y \sim Bi(n, 0.2)$. $P(Y \geq 1) = 1 - P(Y < 1) = 1 - P(Y = 0) = 1 - f_Y(0) = 1 - 0.8^n$. Então, $P(Y \geq 1) \geq 0.9 \Leftrightarrow 1 - 0.8^n \geq 0.9 \Leftrightarrow n \geq 10.32 \Rightarrow$ são necessários pelo menos 11 dispositivos.

Grupo II	5 valores

1. Um cabo de sustentação de uma ponte suspensa é constituído por um feixe de 500 fios de aço. Admita que as durações dos fios de aço, em anos, são variáveis aleatórias independentes com distribuição exponencial de valor esperado 500.

(a) Calcule a probabilidade de um fio de aço durar no máximo 120 anos sabendo que já está em uso há mais de 70. (1.0)

Seja $X =$"duração de um fio de aço" com $X \sim Exp(1/500)$. $P(X \leq 120 \mid X > 70) = 1 - P(X > 120 \mid X > 70) \overset{*}{=} 1 - P(X > 50) = F_X(50) = \int_0^{50} \frac{1}{500} e^{-\frac{x}{500}}\, dx = 1 - e^{-0.1} \approx 0.095$.
$*$ pela falta de memória da distribuição exponencial.

(b) Obtenha um valor aproximado do quantil de probabilidade 0.9 para a média das durações dos fios de aço que compõem um cabo de sustentação da ponte. (1.5)

Seja $\bar{X} = \dfrac{\sum_{i=1}^{500} X_i}{500}$ a média das durações dos 500 fios de aço que compõem um cabo. Pretende-se um valor aproximado de $F_{\bar{X}}^{-1}(0.9)$. Uma vez que $F_{\bar{X}}$ não é conhecida temos, pelo T. L. C., que

$$\frac{\bar{X} - E[X]}{\sqrt{Var[X]/500}} = \frac{\bar{X} - 500}{\sqrt{500}} \overset{a}{\sim} N(0,1) \Leftrightarrow \bar{X} \overset{a}{\sim} N(500, 500).$$

$F_{\bar{X}}^{-1}(0.9) \approx F_{N(500,500)}^{-1}(0.9)(= 500 + \sqrt{500}\Phi^{-1}(0.9) = 500 + \sqrt{500} \times 1.2816) \approx 528.66$ anos.

2. Sejam X e Y variáveis aleatórias relacionadas com a medição da rugosidade superficial de um tipo de papel por dois métodos e cuja função densidade de probabilidade conjunta tem a forma

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} k, & 0 < x < 4,\ y > 0,\ x - 1 < y < x + 1; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

(a) Mostre que $k = 2/15$ e calcule $F_{X,Y}(1,2)$. (1.0)

Tem-se que $\int_0^1 \int_0^{x+1} k\, dydx + \int_1^4 \int_{x-1}^{x+1} k\, dydx = \frac{15k}{2}$. Então, $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\, dydx = 1 \Leftrightarrow \frac{15k}{2} = 1 \Leftrightarrow k = \frac{2}{15}$.
$F_{X,Y}(1,2) = P(X \leq 1, Y \leq 2) = \int_{-\infty}^{1} \int_{-\infty}^{2} f_{X,Y}(x,y)\, dydx = \int_0^1 \int_0^{x+1} \frac{2}{15}\, dydx = \frac{1}{5}$.

(b) Defina a função densidade de probabilidade marginal de X e mostre que $F_{Y|X=1}(1/2) = 1/4$ (se não determinou $f_X(x)$, use o facto de $f_X(1) = 4/15$). (1.5)

$$f_X(x) = \int_{I\!R} f_{X,Y}(x,y)\, dy = \begin{cases} \int_0^{x+1} \frac{2}{15}\, dy = \frac{2}{15}(x+1), & 0 < x \leq 1; \\ \int_{x-1}^{x+1} \frac{2}{15}\, dy = \frac{4}{15}, & 1 < x < 4; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}.$$

$$f_{Y|X=1}(y) = \frac{f_{X,Y}(1,y)}{f_X(1)} = \begin{cases} \frac{1}{2}, & 0 < y < 2; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

$F_{Y|X=1}(1/2) = \int_{-\infty}^{1/2} f_{Y|X=1}(y)\, dy = \int_0^{1/2} \frac{1}{2}\, dy = \frac{1}{4}$.