



# Probabilidades e Estatística

LQ, MEBiol, MEQ, LEMat, LEIC-A, MA, MEFT, MEBiom, LMAC,  
MEAmbi, MEAer, MEMec, LEAN, LET, MEC, LEGM, MEEC

1.º semestre – 2009/10

2.º Teste/1.º Exame

14/01/2010 – 9 horas

Duração: 1 hora e 30 minutos/3 horas

- Se pretende fazer o **exame** deve resolver **todos os grupos**.
- Se pretende fazer o **2.º teste** deve resolver **apenas os grupos III e IV**. Nesse caso as cotações passam a ser o dobro das indicadas.
- **Justifique** convenientemente todas **as respostas**.

## Grupo I

*6 valores*

1. Uma companhia de seguros do ramo automóvel classifica as suas apólices em 3 categorias, consoante o risco atribuído. Em certo momento a composição da carteira de apólices é a seguinte

Categoria	Apólices	Apólices com pelo menos um acidente no último ano
A	35000	1750
B	50000	5000
C	15000	2250

- (a) Escolhida uma apólice ao acaso deste conjunto de apólices, verificou-se que
- esta registou pelo menos um acidente no último ano. Determine a probabilidade dessa apólice estar classificada na categoria A; (0.5)
  - esta não pertence à categoria A. Determine a probabilidade dessa apólice não ter registado acidentes no último ano. (1.0)
- (b) Um administrador requisitou um grupo de 10 apólices para análise. Sabendo que as apólices foram seleccionadas ao acaso, indique a expressão que dá a probabilidade exacta de nas 10 apólices analisadas haver no máximo uma da categoria A e calcule um valor aproximado dessa probabilidade. (1.5)
2. Um jogo consiste em lançar um dado perfeito (de 6 faces) e observar o resultado. Um jogador ganha se o resultado do lançamento for uma sena (6), recebendo então o prémio de 5 euros.
- (a) Sabendo que cada jogador paga 1 euro por jogada, diga, justificando, se este é um jogo honesto. (1.0)
- (b) Um jogador prepara-se para jogar até ganhar, isto é, até que lhe saia uma sena. Qual a probabilidade do jogador ganhar
- com mais do que 16 jogadas? (1.0)
  - com mais do que 16 jogadas, sabendo que não ganhou nas 15 jogadas anteriores? (1.0)

## Grupo II

*4 valores*

O estudo dos registos da actividade de um certo serviço público revelou que o tempo de atendimento de um utente ( $X$ , em minutos) tem distribuição normal.

- (a) Sabendo que o desvio padrão de  $X$  é igual a 3 minutos e que 15.87% dos utentes demoram mais do que 13 minutos a ser atendidos, mostre que o valor esperado de  $X$  é igual a 10 minutos. (1.0)
- (b) Sabendo que 15 utentes chegaram ao serviço e assumindo que os tempos de atendimento são independentes de utente para utente, determine
- a probabilidade de pelo menos 2 serem atendidos em menos de 8 minutos; (1.5)
  - a probabilidade do tempo total de atendimento dos 15 utentes ultrapassar duas horas. (1.5)

**Grupo III**

6 valores

1. O tempo de vida das componentes electrónicas de um certo tipo ( $X$ , em horas) tem distribuição exponencial com valor esperado  $1/\lambda$ .
- (a) Com base numa amostra aleatória de  $n$  componentes, deduza o estimador de máxima verosimilhança de  $\lambda$ . Obtenha ainda o estimador de máxima verosimilhança da mediana de  $X$  e mostre que este estimador é centrado. (2.5)
- (b) Seleccionadas, ao acaso e de forma independente, 5 daquelas componentes, registaram-se os seguintes tempos de vida: 490, 570, 503, 452, 513. Com base nestas observações obtenha as estimativas de máxima verosimilhança da mediana e do valor médio de  $X$ . (0.5)
2. O rendimento ( $X$ ) e a despesa ( $Y$ ) mensais de uma família, em centenas de euros, têm distribuições normais com igual variância. Para comparar as duas quantidades foram recolhidas ao acaso e de forma independente duas amostras, uma da lista dos rendimentos mensais e outra da lista das despesas mensais. As duas amostras figuram no quadro seguinte, onde se apresentam também a média e o desvio padrão (d.p.) observados em cada uma.

Variável	Amostra												média	d.p.
rendimento	33.33	34.05	30.12	29.18	32.14	34.29	28.71	29.60	31.25	30.77	30.00		31.22	1.97
despesa	28.77	31.80	30.41	28.89	30.75	28.21	27.86	28.94	27.45				29.23	1.45

- (a) Calcule um intervalo de confiança a 95% para a diferença entre os valores esperados do rendimento e da despesa. (1.5)
- (b) Averigue, usando um teste de hipóteses adequado, se esta família tem condições de fazer poupanças, ou seja, se o seu rendimento esperado é significativamente superior à despesa esperada. Responda usando níveis de significância de 1% e de 5%. (1.5)

**Grupo IV**

4 valores

A percentagem de matéria gorda,  $x$ , e a percentagem de resíduos sólidos,  $Y$ , foram medidos em 16 amostras de leite, tendo produzido os seguintes dados

$x$	2.8	3.4	3.0	2.8	3.4	3.4	3.4	2.8	4.4	2.4	3.5	3.7	2.7	4.3	4.1	3.2
$y$	6.4	7.6	7.8	4.9	7.1	8.1	6.7	6.2	10.9	4.7	8.9	8.5	7.9	11.0	9.1	7.2

Efectuado um resumo dos dados obtiveram-se os seguintes valores:

$$\sum_{i=1}^{16} x_i = 53.3, \quad \sum_{i=1}^{16} y_i = 123, \quad \sum_{i=1}^{16} x_i^2 = 182.65, \quad \sum_{i=1}^{16} y_i^2 = 993.34, \quad \sum_{i=1}^{16} x_i y_i = 423.52$$

Para estudar a relação entre as variáveis  $x$  e  $Y$  decidiu-se usar o modelo de regressão linear simples de  $Y$  em  $x$ .

- (a) Uma nova amostra de leite revelou 4.0% de matéria gorda. De acordo com o modelo estimado, indique a estimativa do valor esperado da percentagem de resíduos sólidos para amostras com esta percentagem de matéria gorda. (1.0)
- (b) Acha que os dados revelam evidência de existência de relação linear entre  $Y$  e  $x$ ? Responda com base no valor-p. (2.0)
- (c) Calcule o coeficiente de determinação e comente o valor obtido, nomeadamente relacionando-o com a conclusão da alínea anterior. (1.0)